Sammlung

von

Aufgaben

aus der

Buchstabenrechnung und Algebra.

Für

Schulen und zum Selbstunterricht

bearbeitet

von

Konrad Fuß.

Vierte, vermehrte und verbesserte Auflage.

Hierzu erschien in demselben Verlage: Fuß, Lehrbuch der Buchstabenrechnung und Algebra für den Schul- und Selbstunterricht; I. und II. Teil; 3. Auflage.

Nürnberg 1898.
Verlag der Friedr. Kornschen Buchhandlung

Sammlung

von

Aufgaben

aus der

Buchstabenrechnung und Algebra.

Für

Schulen und zum Selbstunterricht

bearbeitet

von

Konrad Fuß.

Vierte, vermehrte und verbesserte Auflage.

Hierzu erschien in demselben Verlage: Fuß, Lehrbuch der Buchstabenrechnung und Algebra für den Schul- und Selbstunterricht; I. und II. Teil; 3. Auflage.

Nürnberg 1898.

Verlag der Friedr. Kornschen Buchhandlung.

Druck von E. Th. Jacob in Erlangen.

Vorwort
zur vierten Auflage.

Die freundliche Aufnahme, die fortgesetzt meiner Sammlung von Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra zu teil wird, machte die vorliegende vierte Auflage derselben nötig.

Da sich der Plan, den die dritte Auflage aufweist, in der Praxis bewährt hat, so lag ein Grund zu wesentlichen Abänderungen nicht vor.

Doch habe ich meine Arbeit nach Kräften zu verbessern gesucht, um sie für den Mathematikunterricht immer brauchbarer zu gestalten. So wurden einige Abschnitte schärfer gegliedert, andere etwas erweitert und mit neuen, instruktiven Aufgaben versehen. Namentlich bestrebte ich mich aber, den neuen Bestimmungen der Allerhöchsten Lehrordnung vom 30. Juli 1898, die Bildung der Lehrer und Lehrerinnen in Bayern betr., möglichst gerecht zu werden. Aus diesem Grunde fanden Aufgaben über die geometrischen Proportionen in allgemeiner Begründung und die reinen kubischen Gleichungen Aufnahme, und wurden die Aufgaben zur Lehre von den Gleichungen des zweiten Grades vermehrt. In dieser Erweiterung ist nun meine Aufgabensammlung für den algebraischen Unterricht sowohl im dritten Kursus der Präparandenschulen, dem die vier Grundrechnungsarten der Buchstabenrechnung zur Behandlung zugewiesen sind (man vergl. die Aufgaben des ersten Abschnitts, S. 1—31 und die des Paragraphen 29, S. 65—66), als auch in den beiden Seminarkursen ausreichend. Sie kann mithin in drei Kursen von den Zöglingen benützt werden. (Höchste Ministerialentschließung vom 8. September 1898, Ziffer 10, das Verzeichnis der Lehrmittel für bayerische Lehrer- und Lehrerinnenbildungsanstalten betr.).

Ein besonderes Interesse haben für die Mathematik studierenden Schüler jene Aufgaben, die bei Prüfungen zu

lösen waren, sei es bei den Seminarschluß- und Anstellungsprüfungen, denen die angehenden Lehrer entgegengehen, sei es bei dem Absolutorium anderer Anstalten, z. B. der humanistischen Gymnasien und Realschulen Bayerns. Es ist dies leicht begreiflich; können sie doch aus solchen Aufgaben Ziel und Umfang der Anforderungen erkennen, welche bei den betreffenden Prüfungen an die Kenntnisse und die Leistungsfähigkeit der Prüflinge gestellt werden, und daraus lernen, was sie selbst zu leisten vermögen. Dieser Gesichtspunkt war für die Aufnahme der Prüfungsaufgaben S. 144—186 maßgebend.

Daß ich bei Bearbeitung der vorliegenden Aufgabensammlung und insbesondere ihrer neuesten Auflagen die einschlägige mathematische Literatur, namentlich auch die jüngsten Publikationen, zu Rate gezogen und benützt habe, wird dem aufmerksamen Leser nicht entgehen.

Das Heft, welches die Resultate und Lösungs-Andeuungen zu den Aufgaben dieser Sammlung enthält, erscheint diesmal auf vielseitigen Wunsch in erweiterter Form und bringt zu einem Teil der schwierigeren Aufgaben, namentlich der Prüfungsaufgaben, ausführliche Erläuterungen. Ich hoffe, Vielen damit einen wesentlichen Dienst zu erweisen.

Möge meine Aufgabensammlung auch fernerhin wohlwollende Aufnahme finden!

Altdorf, im Oktober 1898.

K. Fuß.

Vorwort
zur dritten Auflage.

In der vorliegenden dritten Auflage meiner Sammlung von Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra habe ich, durch die Wünsche verehrter Kollegen, die Winke der Kritik und eigene Erfahrungen veranlaßt, an dem ursprünglichen Plane des Buches einige Veränderungen vorgenommen.

Die Resultate und Andeutungen zu den Auflösungen wurden von den Aufgaben getrennt und erscheinen nun als selbständiges Heftchen; dieses wird jedoch nur auf ausdrückliches Verlangen zu der Aufgabensammlung geliefert.

Fast durchgehends habe ich die Aufgaben in 2 Gruppen geschieden: in Aufgaben für das mündliche und in solche für das schriftliche Rechnen; die ersteren können vorzugsweise zur Ableitung der Gesetze und Regeln und zur Einübung derselben in den Unterrichtsstunden benützt werden; die letzteren dagegen sind zur schriftlichen Bearbeitung bestimmt. Durch diese Trennung möchte ich dazu anregen, daß in jeder Unterrichtsstunde so viel als möglich im Kopf gerechnet wird, damit die Schüler fortwährend im sicheren Behalten der Zahlen und im raschen und gewandten Operieren damit geübt werden. Fast jedes Gebiet der allgemeinen Arithmetik eignet sich zu solchen Übungen. Selbst die Auflösung leichter gegebener Gleichungen und die Umwandlung leichter Textaufgaben in Gleichungen läßt sich ganz gut frei im Kopfe ausführen. Die für das Kopfrechnen bestimmten Aufgaben werden in der Regel vom Schüler aus der Sammlung vorgelesen und dann aufgelöst. Es ist aber auch notwendig, daß der Lehrer von Zeit zu Zeit solche Aufgaben vorspricht, damit die Schüler geübt werden, Zahlen zu behalten und zu behandeln, deren Bilder sie nicht vor Augen haben. Zur Erzielung ungeteilter Aufmerksamkeit beim Unterricht, von Gewandtheit und Schlagfertigkeit im Rechnen sind solche Übungen unerläßlich.

Das gesamte Übungsmaterial habe ich möglichst übersichtlich nach den im Unterricht zu entwickelnden Gesetzen und Regeln geordnet und diese Gliederung auch durch

entsprechende Überschriften markiert. Eine derartige Einrichtung gewährt den großen Vorteil, daß jedem Satze, der im Unterricht mit den Schülern entwickelt wird, unmittelbar seine Einübung folgen kann. Alle Aufgaben der folgenden Paragraphen sind so beschaffen, daß nicht bloß die in den betreffenden Überschriften genannten Sätze, sondern auch alle früheren, angewandt und wiederholt werden. Namentlich ziehen sich die Übungen der Faktorenzerlegung und der damit zusammenhängenden Reduktionen durch einen großen Teil der Aufgaben.

Der Forderung der neueren Pädagogik, „daß die Mathematik zu den Wissensfächern und zum Leben in Beziehung zu treten habe*)," suchte ich dadurch gerecht zu werden, daß ich zu Einkleidungen von Aufgaben vielfach Gesetze der Physik und Chemie heranzog. Durch die Lösung solcher Aufgaben wird nicht nur die mathematische Erkenntnis gefördert, sondern durch dieselbe gewinnen auch die physikalischen und chemischen Anschauungen und Begriffe an Bestimmtheit und Klarheit, ein Umstand, der seitens derjenigen Mathematiklehrer, in deren Händen sich auch der physikalische und chemische Unterricht befindet, die größte Beachtung verdient.

Die vorliegende Sammlung hat sich in den zwei ersten Auflagen einer wohlwollenden Aufnahme zu erfreuen gehabt**); möge dieselbe auch der neuen Auflage, deren Abänderungen als Verbesserungen anzusehen sein dürften, zu teil werden!

Altdorf, im Juni 1890.

K. Fuß.

---

*) „Zwischen dem Mathematikunterricht und den Wissensgebieten muß ein Verkehr hergestellt werden. Dieser nachbarliche Verkehr ist für beide Teile vorteilhaft. Die Wissensfächer gewinnen dadurch an Bestimmtheit und Deutlichkeit und der Mathematikunterricht an Mannigfaltigkeit, Belebung und Interesse" (Dörpfeld).

„Der Mathematikunterricht kleidet seine Aufgaben mit demselben Rechte physikalisch ein, wie er sonst ihre äußere Form den Verhältnissen des bürgerlichen Lebens oder des kaufmännischen Verkehrs zu entlehnen weiß." (Dr Helm).

**) Wurde auch durch Hohe Ministerialentschließung in das Verzeichnis der in Bayern genehmigten Lehrmittel aufgenommen.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Abschnitt.

Die vier Species mit bestimmten und allgemeinen algebraischen Zahlen.

I. Ganze Zahlen.

Vierter Abschnitt.

Vermischte Reduktionen.

Fünfter Abschnitt.

Gleichungen.

A. Gleichungen des ersten Grades.

I. Mit einer Unbekannten.

Bemerkungen betreffs einer Auswahl von Aufgaben aus dieser Sammlung.

Für Schulen, die wegen Mangels an Zeit die Lehre von den Potenzen und Wurzeln nicht eingehend behandeln können, empfiehlt sich folgender Gang:

I. Die Aufgaben des ersten Abschnitts (ein Teil der schriftlichen Aufgaben kann weggelassen werden). In denselben kommen schon viele Gesetze der Potenzen in Anwendung; die Quadrate der Zahlen von 1 bis 25 und die Kuben der Zahlen von 1 bis 15 sind schon in den ersteren Unterrichtsstunden zu bilden und den Schülern einzuprägen, da sie bei der Faktorenzerlegung sehr häufig in Anwendung kommen.

II. Die Aufgaben über das Potenzieren und Radizieren der verschiedenen Zahlformen, § 15 und § 23; die einander entsprechenden Lehrsätze des Potenzierens und Radizierens sind einander gegenüber zu stellen und miteinander zu vergleichen.

III. Die Aufgaben über das Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzeln, § 21 und § 22.

IV. Die Aufgaben über die Gleichungen, § 31 bis § 40; als wertvollste Anwendung der vorhergegangenen Lehren sind diese eingehend zu behandeln.

V. Die noch im Rückstand befindlichen Übungen des zweiten und dritten Abschnitts, soweit die zur Verfügung stehende Zeit ausreicht.

VI. Die Aufgaben des vierten Abschnitts, sowie die Aufgaben des Anhangs I und II, die zu einer Gesamtwiederholung des Pensums veranlassen.

Erster Abschnitt.

Die vier Species mit bestimmten und allgemeinen algebraischen Zahlen*).

I Ganze Zahlen.

§ 1. Addition.

a) Addition von Monomen.

Mündlich**).

1) (+ 19) + (+ 21). 2) (+ a) + (+ b). 3) (+ f) + (+ g).
4) (— 13) + (— 15). 5) (— a) + (— b). 6) (— m) + (— n).
7) (+ 18) + (— 11). 8) (+ a) + (— b). 9) (+ p) + (— q).
10) (— 13) + (+ 9). 11) (— 19) + (+ 15). 12) (— b) + (+ a).
13) (+ 8) + (+ 10) + (— 12) + (+ 24) + (— 2) + (+ 30) + (— 11).
14) (+ 50) + (— 39) + (+ 40) + (— 6) + (— 3) + (+ 100) + (— 200).
15) 10 — 5 + 6 — 19 + 24 — 30 + 2 — 3.
16) — 30 + 5 — 40 + 100 — 3 + 80 — 50 — 70.
17) 50 — 60 + 20 + 15 — 2 + 80 — 25 + 33 — 6.
18) 85 + 2 — 75 + 92 — 3 + 76 + 2 — 3 + 9 — 17.
19) a + a + a + a. 20) 3a + 4a + 6a + 8a.
21) 3f + f + 5f + 9f. 22) — 3a — 4a — 6a — 11a.
23) — g — 8g — 7g — 12g. 24) — 5x — 11x — 19x — 25x.
25) 6a — 3a + 13a — a. 26) — 8x + 19x — 25x + 3x.
27) — 11d — 3d + 5d — 16d + 10d.

---

*) Als Vorübungen zu diesen vier Grundrechnungsarten der Buchstabenrechnung können die Aufgaben 1 bis 5 des § 10 benützt werden.

**) Über die Stellung des mündlichen oder freien Rechnens (Allerhöchste Lehrordnung für die bayerischen Lehrer- und Lehrerinnenbildungsanstalten vom 30. Juli 1898) im Mathematikunterricht vergleiche man die Vorrede zur 3. Auflage dieser Sammlung.

28) $3a + 4b + 8a + 5b + a + b$.
29) $-11a + 5b + 13a + 18b - 15b + a$.
30) $3x + 5y - 8x + 11y - 23y + 7x$.
31) $x + y + x - y - 2x$.
32) $-m + 3n + m - n - n - n$.
33) $8z + 7y - 9z - 11y + 4z$.
34) $3a - 5b + 6c - a + 8b - 11c + 5b$.
35) $-3x + 8y - 6z + 11x - 10x + 7z$.
36) $8x + 12y + 21z - 30x - 40y + z$.
37) $-100m + 50n - 75n + 273 - 462n + 985m + 1030n$.
38) $4{,}5a - 12{,}7b - 30{,}3a + 50{,}6b + 100{,}9a + 120{,}4b$.
39) $3a^4 + 7a^4 + 11a^4 + 15a^4$. 40) $-8b^3 - 11b^3 - 3b^3 - 6b^3$.
41) $12a^5 - 7a^5 + 8a^5 - a^5$. 42) $3a^2b^3c - 2a^2b^3c + 18a^2b^3c$.
43) $18m^5 - 19n^6 + 27m^5 + 30n^6 - 12n^6 + 45m^5 + 40n^6$.
44) $32x^2y^5 - 45y^6z^3 + 18x^2y^5 + 37y^6z^3 - 15x^2y^5 + 2y^6z^3$.

Schriftlich.

1) $-473\,875 + 985\,742$.
2) $3\,406\,009 - 5\,873\,982$.
3) $-8\,452 + 77\,003 - 10\,007 + 52\,845 - 345$.
4) $8\,425x - 3\,657y - 95\,002x + 88\,003y + 2\,005\,033x - 44\,687y$.
5) $3\,945m^3n^5 - 453x^2y^3 - 8\,975m^3n^5 + 895x^2y^3 + 121\,003m^3n^5 - 81\,073x^2y^3$.

b) Addition von Polynomen.

Mündlich.

1) $30 + (40 + 11a)$. 2) $50 + (30a + 37)$.
3) $23a + (18a + 15b)$. 4) $24y + (18x + 30y)$.
5) $(6a - 7b + 3c - 4d) + (2a - 3b + 5c - 8d)$.
6) $(7a + 8b - 5c + 8d + 5) + (-5a - 9b + 6c - 7d - 3)$.
7) $(a - b + c) + (-a + b - c) + (-a + b + c) + (a + b - c)$.
8) $(15a + 14b - 18c + 20d) + (-24a + 30b - d) + (-5b + 8c) + (-6a - 20b + 40c - 30d)$.
9) $(3a - 4c + 8f - x) + (-19a + 18c - d) + (-13a + 18c + 9f)$.
10) $(-m + n + 3p - 8q + 3x - 8y) + (-3m + 8n - 2p + 3q - x + y) + (3m - 8n - 13p + 19q + 8x - 3y) + (5m - 8n + 14p - 22q - 3x + 5y)$.
11) $(x - y + z) + (-x + y - z) + (-x + y + z) + (3x + 6y - 12z) + (-8x + 5y + 3z)$.

12) $(3a + 4b - 8c) + (-11a - 12b + 15c) + (-18a + 24b - 25c) + (3a - 5b + 13c) + (-24a + 30b - c)$.

13) $(6m + 5n + 3p) + (-11m + 8n - p) + (12m - 13n + 6p) + (100m + 14n - 3p) + (-50m + 3n + 9p)$.

14) $(-5x + 3y - 5z) + (9x - 10y + 11z) + (-18x + 25y - 3z) + (x - y + z) + (21x + 3y - 5z)$.

15) $(3a^2 - 4b^3 + 5c^4) + (-6a^2 + 9b^3 - 6c^4) + (12a^2 - 24b^3 - 15c^4) + (-6a^2 + 8b^3 + 10c^4)$.

Schriftlich.

1) Es sei $A = 4x - 5y + 6z$; $B = 8x + 5y - 6z$; $C = -10x + 8y + 6z$; $D = 12x - 10y + 2z$; wie groß ist alsdann: **a)** $A + B + C + D$; **b)** $A + A + A + A$; **c)** $A + B + B + C + D + C$?

2) Es sei $F = 324a - 687b + 875,45c$;
$G = -100,75a + 843,58b - 1236,36c$;
$H = 120,24a - 48,72b + 138,65c$;
$J = -1875,42a + 2025,5b - 885,27c$; wie groß ist alsdann:
a) $F + G + H + J$; **b)** $F + F + G + H + H + J$;
c) $F + G + G + H + J + J$?

§ 2. Subtraktion und Addition.

a) Subtraktion von Monomen.

Mündlich.

1) $(+10) - (+8)$. **2)** $(+30) - (+15)$.
3) $(+a) - (+b)$. **4)** $(+x) - (+y)$.
5) $(+30) - (-15)$ **6)** $(+46) - (-41)$.
7) $(+a) - (-b)$. **8)** $(+x) - (-y)$.
9) $(-80) - (-60)$. **10)** $(-30) - (-40)$.
11) $(-a) - (-b)$. **12)** $(-18) - (+19)$.
13) $(-4) - (+15)$. **14)** $(-a) - (+b)$.
15) $(-1) - (-1)$. **16)** $(-1) - (-2)$.
17) $(+18a) - (+15a)$. **18)** $(-19a) - (-14a)$.
19) $(+15a) - (-3a)$. **20)** $(-33x) - (+5x)$.
21) $(-14y) - (+18y)$. **22)** $(-15a) - (-6a)$.
23) $(-17x) - (+18x)$. **24)** $(-17x) - (-18x)$.
25) $(+30x^3) - (-15x^3)$. **26)** $(-45m^5) - (-89m^5)$.

Schriftlich.

1) (+ 88 752) — (+ 95 832). 2) (— 32 635) — (— 77 032).
3) (— 48 352a) — (+ 5 349 762a).
4) (— 3 435 687x^5y^6) — (— 2 832 504x^5y^6).
5) (+ 87 504$a^2b^3c^4$) — (+ 32 003$a^2b^3c^4$) — (— 842 045$a^2b^3c^4$) *).

b) Subtraktion von Polynomen.

Mündlich.

1) 24a — (18a + 12b). 2) 30a + 42b — (12a — 30b).
3) 54x + 42y — 30z — (20x + 24y — 48z).
4) (4a — 5b + 6c — x) — (— a + 6b — 5c + x).
5) (9a + 8b — c + f — g + 3x) — (— 8a + 7b + c — f + 8g + 5x).
6) (10a + 9b + 12c) — (9a — 7b + 10c).
7) (13x — 15y + z) — (— 8x + 7y — z).
8) (— 8m — 15n + 6q) — (— 17m — 13n — 12q).
9) (— 6m + 12n — 9p) — (— 18m — 15n + 10p).
10) (3 + 5) — 2 — (— 1 + 3 — 5 + 4 — 8 + 12).

Schriftlich.

1) 24a + 36b — (4a — (3a — 6b)).
2) 50m — 30n + 18p — (— 8m — (— 5m + 10n — 2p)).
3) ((2a — 3b + 4c) — (— 8a + 5b — c)) — ((2a + 5c) — (5a + 2b)).
4) 30 — [8 — (15 — (3 + 4 — 10 + 12) + 18) — 11].
5) — [4c + (12a — (3b — 2c) — (11b + 7a) — 10c)].
6) 3a — [((2b — c) — 5a) — 4c — (2c — 6b) + (3a — 5b)].
7) 17 + [3 — (a — (b — 8) + 5a) — (6b + (9a — 11))].
8) (23m — (5a — 9)) — (— (3a — 11) + 7m — 16a).
9) x — y — z — u — [x — (y — z — u)] — [x — y — (z — u)].
10) a — [b — (c — [d — (e — f) — g] + h) — k].
11) 20x — 36y + 60z — [8y + 9x — (5x — 12y + z) + (10x — y)] — [12x — (19x — 20y + 13z)].
12) Was erhält man aus a — (b — c), wenn b = 9a — (12m — 11n) und c = 10a — (12m + 11n) gesetzt wird?
13) Welche Größe muß man zu 8m — [5n + 7m — (6m — 5n)] addieren, damit man 11m — [15n — (3m + 7n) + 7m] erhält?
14) Es sei A = 4x — 5y + 6z;
B = 7x + 4y — 3z;

---

*) Zur weiteren Übung lassen sich noch die Beispiele des Paragraphen 12 benützen, die Potenzen mit bestimmten Exponenten enthalten.

$C = -9x + 5y + 10z;$
$D = 11x - 2y - 3z;$ wie groß ist alsdann:

a) $A + B + C + D;$ b) $A - B - C + D;$
c) $A + B - C - D;$ d) $A - (B - C - D);$
e) $A - (B - (C - D));$ f) $B - [C - (A - (D + B))];$
g) $C - [B - (D - (A + C))]$.

15) $[(7a^5 + 8b^6 - 11c^2) + (-8a^5 - 9b^6 + c^2)] - [(8a^5 + 11b^6 + 3c^2) - (-12a^5 - 17b^6 + c^2)]$.

16) $4a^2 - [6b^2 + (3a^2 - (8a^2 - 4b^2) + 6ac) - 8a^2] + 10ac$.

17) $8a^2 - [8a^2 - (6a + [10a^2 - (20a^5 - 11a^2) + 6a] - 13a^2) - 9a] + 5a^2$.

18) $(m + n) - ((3m - 5n) + (8m + 6n)) - (8n + 11m)$.

19) $8x + [5x - (9x - (5y - 6x) - 12y) - 16x] - (3x - (5y - x))$.

20) $10a - [6a - (8b - (5c + 6a - 4b) + 11a) - 15b] - [5a - (3a + (30b - 25c) - 18a) + 20b]$.

§ 3. Multiplikation.

a) Multiplikation von Monomen mit Monomen.

Mündlich.

1) $(+6) \cdot (+5)$. 2) $(+a)(+b)$. 3) $(+7) \cdot (-9)$.
4) $(+a)(-b)$. 5) $(+x)(-y)$. 6) $(-10)(+11)$.
7) $(-a)(+b)$. 8) $(-12)(-13)$. 9) $(-a)(-b)$.
10) $(-x)(-y)$. 11) $4a \cdot 8$. 12) $9 \cdot -5a$.
13) $3 \cdot 24x$. 14) $25y \cdot 4$. 15) $15abc \cdot 8$.
16) $7a \cdot 3b$. 17) $-8x \cdot -5y$. 18) $7ab \cdot 9bc$.
19) $27bxy \cdot -3cxy$. 20) $-8fgm \cdot -3g$.
21) $-10xyz \cdot -5yz$. 22) $3m \cdot -4ap \cdot -5px$.
23) $-8abc \cdot -8abc \cdot -5bcf$. 24) $3mn \cdot -5np \cdot 8pxy$.
25) $2^3 \cdot 2^4$. 26) $a^4 \cdot a^3$.
27) $4a^5 \cdot 5a^5$. 28) $8a^3 \cdot -7a^5$.
29) $-5x^3 \cdot -6x^5$. 30) $a^3 \cdot a^4 \cdot a^5$.
31) $2b \cdot 3b^3 \cdot 4b^2$. 32) $-3m^5 \cdot -2m \cdot 6m^6$.
33) $4a^5 \cdot a^8 \cdot 6a^3 \cdot 4a^2$. 34) $a^8 \cdot b \cdot a^7 \cdot 3b^6$.
35) $75a^2 \cdot 28a^3b^6$. 36) $18a^3b^5c^8 \cdot 4a^4bc^2 \cdot 5a^5b^6c$.
37) $(a + b)^4 \cdot (a + b)^5$. 38) $(x - y)^3 \cdot (x - y)^5$.
39) $4(m-n)^2 \cdot 5(m-n)^6$. 40) $3(a^2 - b)^5 \cdot 5(a^2 - b)^6$.
41) $3(a - b)^5 \cdot 4(a - b)^6$. 42) $5a^3b^4c^5 \cdot -6a^2b^8c^4$.

Schriftlich.

1) $-42063 \cdot 5069$. 2) $34a^2x^4y^5 \cdot -632x^3y^6$.
3) $365a^3b^5c^6 \cdot -762a^6b^7c^9$.
4) $35(x-y)^3 \cdot -42(x-y)^6 \cdot -54(x-y)^{10}$.

b) Multiplikation von Polynomen mit Monomen.

Mündlich.

1) $(a+b) \cdot c$*). 2) $p \cdot (m+n)$. 3) $(x+1) \cdot n$.
4) $(a+b)5$. 5) $(m+n) \cdot 7$. 6) $(a+18) \cdot 24$.
7) $(b+7)13$. 8) $(a-b)c$. 9) $(1-x)8$.
10) $(9-a)13$. 11) $(m-n) \cdot -a$. 12) $(4a-3b)5$.
13) $(a+3b+343) \cdot 12$. 14) $(a-23+b)75$.
15) $(3a+6b-8c) \cdot 3g$. 16) $3m \cdot (4mn-7np-x+2y)$.
17) $(7ab-3mn+8fg) \cdot -4ac$.
18) $15a^2(3a^2-4b^4+5c^5-8d^4)$.
19) $(3a^2-4b^3+6c^2-8f^2) \cdot 5ab$.
20) $(3a^2bc^3+5a^3b^4c^4+7a^4fg) \cdot 6a^4b^5c^2$.
21) $-7xy \cdot -(8yz+4tu-5xv)$.
22) $(4mn-8cd+4m-5q) \cdot -3xy)$.

Schriftlich.

1) $[(m+7)m+9]x+11$.
2) $\{[(a-9)a+13]a-45\}a+32$.
3) $4a+7(m+n)$. 4) $3x+9(y+z)$.
5) $8a-7(b+c)$. 6) $8m-9(n-p)$.
7) $m+n(p+q-r)-a(b+c)-r(s-t)$.
8) $27+23(a+b+c)-15(x-y-z)$.
9) $(5x+4y-3z)6-(3x+6y-8z)8+24x-30y$.
10) $(8mn-10np+11mq)5p-(9mn+11np-12mq)6p$.
11) $3a^2bc(7ab^2c^3+11a^2b^3c^4)-4ac^2(a^2+2ab+b^2)-5a^2 \cdot 6c^3$.
12) $(8mn-10np+11mq)7p-(9mn+11np-12mq)6p$.
13) $(3a-b+c)d-(4a+2b-c)f+(8a+5b-6c)d$
$+40ad-30cd$.

---

*) Es empfiehlt sich, mit der Multiplikation sofort die Division und Faktorenzerlegung zu verbinden und zwar in der Reihenfolge der sieben Fälle, § 5. Die Schüler rechnen also z. B. $(a+b)c = ac+bc$ und sofort wieder $\frac{ac+bc}{c} = a+b$ und $ac+bc = c(a+b)$. Schon bei Entwicklung des Satzes über die Vorzeichen lassen sich diese 3 Operationen miteinander verbinden.

14) $a(m - n + p) - b(n - m + p) + c(m + n - p)$.
15) $4a^2b^2c^3 - 5a^2b(6bc^3 - 4ac^4) - 7abc^5(10a^4bc^6 - 12ac^4)$.
16) $5x^6 - 2x^3(3x^2 - 6x(4x^2 - 10x^3) - 11x^6) + 8x^2(6x^6 - 5x^4(3x^5 + 7x^6) - 16x^3)$.

c) Multiplikation von Polynomen mit Polynomen.

Mündlich.

1) $(a + b)(c + d)$.
2) $(2a + 3b)(4c + 5d)$.
3) $(3x + 4y)(7z + 9t)$.
4) $(a - b)(c + d)$.
5) $(a + b)(c - d)$.
6) $(a - b)(c - d)$.
7) $(4x + 5y)(6z - 7u)$.
8) $(2m - 3n)(4p - 5q)$.

---

9) $(x + 3)(x + 4)$.
10) $(x + 8)(x + 7)$.
11) $(x + 12)(x - 7)$.
12) $(x + 25)(x - 18)$.
13) $(x - 15)(x + 7)$.
14) $(m - 18)(m + 13)$.
15) $(x - 12)(x - 9)$.
16) $(a - 15)(a - 18)$.
17) $(2a + 3)(3a + 5)$.
18) $(5x + 3)(2x + 7)$.
19) $(4x + 7)(7x + 5)$.
20) $(6x + 7y)(7x + 5y)$.
21) $(3x + 9)(2x - 7)$.
22) $(8x - 11)(3x + 7)$.
23) $(4a - 5b)(7a - 2b)$.
24) $(9x + 17b)(7x - 3b)$.
25) $(6xy - 5xz)(4xy + 7xz)$.
26) $(3a^2b^3 - 4c^5d^6)(4a^3b^7 - 5cd)$.
27) $(3a^4 - 4b^3)(4a^4 + 5b^3)$.
28) $(4m^3 - 5n^2)(3m^3 + 5n^2)$.

---

29) $(a + b)^2$.
30) $(x + y)^2$.
31) $(a - b)^2$.
32) $(2a + 3b)^2$.
33) $(2a - 3b)^2$.
34) $(3x + 4y)^2$.
35) $(5p - 3q)^2$.
36) $(m - 1)^2$.
37) $(1 - x)^2$.
38) $(x + 3)^2x$.
39) $(3a - 2b)^2 \cdot 2a$.
40) $(n - 1)^2n$.
41) $(2a^2 - 1)^2$.
42) $(a^2 + b^2)^2$.
43) $(a^2 - b^2)^2$.
44) $(3a^2 + 4b^2)^2$.
45) $(5x^3 - 4y^4)^2$.
46) $(6m^2 + 7n^3)^2$.
47) 32^2.
48) 55^2.
49) 86^2.
50) 98^2.
51) 197^2.
52) 798^2.

---

53) $(a + b)^3$.
54) $(m + n)^3$.
55) $(a - b)^3$.
56) $(2a + 3b)^3$.
57) $(3a - 2b)^3$.
58) $(4x + 3y)^3$.
59) $(2x + 3y)^3x$.
60) $(a^2 + b^2)^3$.
61) $(x^2 - 1)^3$.
62) 16^3.
63) 19^3.
64) 74^3.

---

65) $(a + b)(a - b)$.
66) $(m + n)(m - n)$.
67) $(11a + 15b)(11a - 15b)$.
68) $(18m - 21n)(18m + 21n)$.
69) $(60 + 4)(60 - 4)$.
70) $34 \cdot 26$.
71) $28 \cdot 32$.
72) $127 \cdot 133$.

73) $7007 \cdot 6993$. 74) $79996 \cdot 80004$.
75) $(x^4 + x^3)(x^4 - x^3)$. 76) $(a^5 + b^7)(a^5 - b^7)$.
77) $(3a^4 + 4b^5)(3a^4 - 4b^5)$. 78) $4x^2y^3 + 7z^8)(4x^2y^3 - 7z^8)$.
79) $(3a + 4b)(3a - 4b)5m$. 80) $(9x^2 + 11y^3)(9x^2 - 11y^3)4z^2$.
81) $(7a + 5b)(49a^2 + 25b^2)(7a - 5b)$.
82) $(5m - 7n)(25m^2 + 49n^2)(5m + 7n)$.

Schriftlich.

1) $(3a + 4b - 8c + 7f)(9a - 5b + 6c)$.
2) $(4x - 5y + 8z)(5x + 7y - 7z)(6x + 10y - 9z)$.
3) $(3a + 4b)(2a - 3b) - (5a - b)(7a + 2b) + (6a + 8b)(9a + b)$.
4) $(2x + 4y - z)(3x - 2y + 2z) - (3x + 5y - 6z)(7x - y + 4z)$
$+ (10x - y + z) - (x + y - 8z)$.
5) $(5x - 3a)(2a - 7x) - (3a - 7x)(6a - 7x)$
$+ (10a - 14x - c)(3a - 8x)$.
6) $5a(3a + 4b - 6c) + 7a(-5a - 6b + 8c) - (3a + b)(10a - 11b$
$+ 7c) + (10a - 8b)(a - b + c) - 4a(2a + b + c)$.
7) $((3x - 2y)3xy - (5xx + 4yy)(x - y))((3x + 2y)(4x - 5z)$
$- (6x - 2y)(4x + 5y))$.
8) $(x^2 - 5y^3 - 4)(x - y)$. 9) $(5a^2 - 3c^4 + 5g^4)(6a^4 - 5b^3)$.
10) $(4x^2 - 16xy + 3y^2)(5x^3 - 2b^2y)$.
11) $(x^5 - 4x^4y + 8x^3y^2 - 11x^2y^3 - 6xy^4)(x^3 - 3x^2y)$.
12) $(3x + 4x^2 + 6x^3 - 5)(4x + 2x^2 - 5x^3)$.
13) $(3a - 4b)(4a + 5b)(8a - 7b)(9a + b)$.
14) $(x + y + z)(-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z)$.

---

15) $(a + b + c)^3$. 16) $(x + y + z)^2$.
17) $(x - y - z)^2$. 18) $(2a + 3b + 4c)^2$.
19) $(4x^2 + 5y + 6z^3)^2$. 20) $(4a^2 + 3b^3 - 2c^4 + 7d^2)^2$.
21) $(7 + 5y - 3y^2 - 2y^3 + 4y^4)^2$.
22) $(a + b + c)(a + b - c)$. 23) $(a - b + c)(a + b - c)$.
24) $(a + b + c)(a - b - c)$. 25) $(x + y + z)(x - y - z)$.
26) $(a^2 + ab + b^2)(a - b)$. 27) $(a^2 - ab + b^2)(a + b)$.
28) $(x^2 + xy + y^2)(x - y)$. 29) $(x^2 - xy + y^2)(x + y)$.
30) $(4m^2 - 6mn + 9n^2)(2m + 3n)$.
31) $16m^2 + 20mn + 25n^2)(4m - 5n)$
32) $(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)(a - b)$.
33) $(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)(a + b)$.
34) $(27a^3 + 36a^2b + 48ab^2 + 64b^3)(3a - 4b)$.
35) $(x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(-x + y + z)$.

§. 4. Division.

a) Division von Monomen durch Monome.

Mündlich.

1) $(+ 30) : (+ 6)$. 2) $(+ x) : (+ y)$. 3) $(+ 30) : (- 6)$.
4) $(+ x) : (- y)$. 5) $(- 30) : (+ 6)$. 6) $(- x) : (+ y)$.
7) $(- 30) : (- 6)$. 8) $(- x) : (- y)$. 9) $(- 35) : (- 5)$.
10) $40a : 8$ 11) $68b : 17$. 12) $75x : 15$.
13) $12y : 3y$ 14) $24mn : 8n$. 15) $32xy : - 16y$.
16) $96mnp : - 16mn$ 17) $- 256xyz : 16z$.
18) $- 432abc : 48ab$ 19) $- 128xyz : 16xz$.
20) $- 24abxy : - 6ab$ 21) $- 32mnpq : 8mm$.
22) $2^9 : 2^6$. 23) $a^9 : a^5$. 24) $18a^9 : 3a^4$.
25) $- 10a^{12} : - 2a^4$. 26) $48x^{12}x^{16}z^{20} : 16x^8y^{12}z^{15}$.
27) $147a^6b^9c^{15} : - 49a^2b^5c^9$. 28) $- 105x^6y^7z^{10} : - 35xy^3z^7$.
29) $(9x)y : 9$. 30) $(7ab)(mnp) : mn$.
31) $(19ab)(24mn) : 3n$. 32) $(12mn)(18pq)(24mn) : 8mn$.

Schriftlich.

1) $(7a^4b^5c^3 \cdot 6a^3b^2) : 3a^3b^6c$.
2) $(4a^5b^3c^5 \cdot 7a^2b^5c^3) : (14a^2b^3 \cdot ab^2)$.
3) $(3x^2y^5z^6 \cdot - 5x^2y^6z^8 \cdot - 7xyz) : 35x^5y^9z^{13}$.
4) $5400x^{12}y^{15}z^{20} : 3x^2yz : 4x^3y^4z^2 : 5xyz : 6x^3y^2z^6$.

b) Division von Polynomen durch Monome.

Mündlich.

1) $(12ab - 16bc + 8bd) : 4b$.
2) $(12abcd - 18abef + 24abgh) : - 6ab$.
3) $(8a^4b^3 + 10a^6b^6 - 14a^8b^{10}) : 2ab$.
4) $(14x^6y^3z^7 - 35x^8y^5z^2 + 56x^{12}y^{15}z^{18}) : 7x^6y^2z$.

Schriftlich.

1) $(54m^{20}n^{30}p^{16} - 135m^{15}n^{24}p^{18} + 216m^{18}n^{36}p^{14}) : 27m^{12}n^{20}p^9$.
2) $[12(x + y) + 25a(x + y) - 37b(x + y) + 60c(x + y)] : (x + y)$.
3) $x - (24y + 24z) : 8$. 4) $24a - (48a + 56b) : 8$.
5) $60m - (72n - 96m) : 24$. 6) $75x - (30ab + 36ac) : 6u$.
7) $5x - (42a \cdot b - 63a^2 + 105a \cdot x) : 21a$.
8) $4m - [(3m - 2n)x - 3(5m + 7n)x] : x$.

c) Division von Polynomen durch Polynome.

Mündlich.

1) $(15x + 15y) : (x + y)$. 2) $(36m + 45n) : (4m + 5n)$.

3) $(120x - 165y) : (8x - 11y)$. 4) $289a + 391b) : (17a + 23b)$.
5) $(mp + np) : (m + n)$. 6) $(acd - bcd) : (a - b)$.
7) $(60x + 75y - 90z) : (4x + 5y - 6z)$.
8) $(42a^2 + 49ab - 84ac) : (6a + 7b - 12c)$.
9) $(am + an + bm + bn) : (m + n)$.
10) $(18am + 24bm + 21an + 28bn) : (3a + 4b)$.
11) $(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b)$.
12) $(a^2 - 2ab + b^2) : (a - b)$.
13) $(a^2 - b^2) : (a - b)$.
14) $(ac - bc + ad - bd) : (a - b)$.
15) $(x^4 - 2x^2y^2 + y^4) : (x^2 - y^2)$.
16) $(18xz + 26xt - 63yz - 91yt) : (9z + 13t)$.

Schriftlich.

1) $(6a^2 - 7ab - 10ac - 20b^2 + 25bc) : (2a - 5b)$.
2) $(18x^2 - 9xy - 24xz - 35y^2 + 40yz) : (3x - 5y)$.
3) $(15a^2 - 5ab + 7ac - 20b^2 + 49bc - 30c^2) : (3a - 4b + 5c)$.
4) $(18x^2 - 21xz - 32y^2 + 100yz - 72z^2) : (6x - 8y + 9z)$.
5) $(6a^4 + 5a^3c - 2a^2c^2 + 19ac^3 - 10c^4) : (2a^2 + 3ac - 2c^2)$.
6) $(3x^5 + 16x^4y - 33x^3y^2 + 14x^2y^3) : (x^2 + 7xy)$.
7) $(6a^2 - a^3 - 14a^4 + 11a^5 - 2a^6) : (3a + 2a^3 - 5a^2)$.
8) $(21a^7 - 43a^6b + 150a^5b^2 - 110a^4b^3 + 104a^3b^4 - 32a^2b^5)$
$: (3a^4 - 4a^3b + 16a^2b^2)$.
9) $(12x^5y^5z^5 + 21x^4y^6z^6 - 32x^3y^7z^7 + 73x^2y^8z^8 - 14xy^9z^9)$
$: (4x^2y^2z^3 - 5xy^3z^4 + 7y^4z^5)$.
10) $(x^2 - y^2) : (x - y)$. 11) $(x^2 - y^2) : (x + y)$.
12) $(x^3 - y^3) : (x - y)$. 13) $(x^3 + y^3) : (x + y)$.
14) $(x^4 - y^4) : (x - y)$. 15) $(x^4 - y^4) : (x + y)$.
16) $(x^5 - y^5) : (x - y)$. 17) $(x^5 + y^5) : (x + y)$.
18) $(x^6 - y^6) : (x - y)$. 19) $(x^6 - y^6) : (x + y)$.
20) Welche Sätze ergeben sich aus den Beispielen 10) bis 19) über die Teilbarkeit durch die Binome $x - y$ und $y + y$?
21) $(x^8 - 16y^8) : (x^2 - 2y^2)$.
22) $(64a^6 - 729b^6c^{12}) : (2a - 3bc^2)$.
23) $(-20x^4 + 8x^2 - 28x^6 + 45x^5) : (3x^2 - 4x^3 + 2x)$ (zuerst zu ordnen!).
24) a) $a : (1 + x)$; b) $1 : (1 - x)$; c) $a : (b + x)$.

§. 5. Zerlegung in Faktoren, Aufsuchen des größten gemeinschaftlichen Maßes und des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen.

I. Zerlegung in Faktoren.

I. Sämtliche Glieder der algebraischen Summe haben einen oder mehrere Faktoren gemein.

Mündlich.

1) $4a + 4b$. **2)** $12x + 12y$. **3)** $15m - 15n$.
4) $5a - 5b + 10c - 20$. **5)** $7m - 7n + 21p - 35q$.
6) $mn + np$. **7)** $ax + bx$. **8)** $xy + xz$.
9) $ab - bc$. **10)** $mn - mp$. **11)** $xy - y$.
12) $am - bm + cm$. **13)** $5a - 5b + 5c - 35$.
14) $(m - 1)a + (m - 1)b$ **15)** $ax + bx + xx + (m - 1)x$.
16) Man berechne: **a)** $16 \cdot 79 + 33 \cdot 79 + 45 \cdot 79 + 65 \cdot 79$;
b) $343 \cdot 215 + 343 \cdot 19 + 343 \cdot 66$.

Schriftlich.

1) $ab^3 + a^3$. **2)** $a^2b^3 - b^2$.
3) $a^3b^4 + a^6c^7$. **4)** $a^3x^5 - a^4y^7$.
5) $a^6 + a^9$. **6)** $b^{10} - b^5$.
7) $b^3c^5 - b^8$. **8)** $a^2x^3 + x^5b^3$.
9) $2a^3b^4c^5 + 3a^2b^2c^6 - 4ab^3c^3$.
10) $4a^4xy^6 - 5a^8x^6y^7 + 3a^3x^2y^5$.
11) $6a^5b^3c^2 + 15a^4b^2c^5 - 21a^9b^2c^6$.
12) $15x^2y^3z^5 - 35x^6y^5z^2 + 45x^3y^4z^3$.
13) $14x^3y^4z^5 + 21x^5y^3z^2 + 28x^4y^2z^4$.
14) $ac - bc + cd - cf$.
15) $18a^4b^3c^7 - 63a^5b^3c^3 + 81a^3b^4c^4$.
16) $(3a - 4b)(m - n) + (5a + 6b)(m - n)$.
17) $4(x - y) + (a - b)(x - y) + (b - 4)(x - y)$.
18) $(8a - b)(m - n) - (7a + 5b)(m - n) - (b - a)(m - n)$.
19) $(2a - 5b)(a - b) + (4a - 3b)(a - b) - (a - b)^2 - (4a - 6b)(a - b)$.
20) $3(x + y)^3 - 12(x + y)^2 + 21(x + y)$.
21) $26m^3(x + y) - 65m(x + y) + 104m^2(x + y)$.
22) $(3x - 5y + 8z)(2x - 3y + 7z) - (3x - 5y + 8z)(-2x + 9y - 8z) + (3x - 5y + 8z)(5x - 11y + 12z) - (3x - 5y + 8z)(12x - y - z)$.
23) $(3x + 4y)(x - y) + (6y + 5x)(x - y) - (x - y)^2 - (7x - 15y)(y - x)$.

II. Nur einzelne Glieder derselben haben Faktoren gemein; vergl. die Beispiele unter b und c des § 3!

Mündlich.

1) $5a + 7m + 7n$. 2) $10a - 17b - 17c$.
3) $6a + 11b - 11c$. 4) $11a - 15b + 15c$.
5) $29m - 11n + 11p + 11q - 9x + 9y + 27$.
6) $37a + 28b - 42c + 56d - 17f + 68g - 85h$.
7) $3a \cdot (2b - c) + (c - 2b)$.

Schriftlich.

1) $8x + 17a + 23m - 51b - 69n + 115 + 24g + 68c$.
2) $m^2 - an^2 + br - ag - bs + a^2 - m + b^2t$.
3) $a - bm - cr + bn + cs - a^2 - c^2s - bq$.
4) $m - n(q - r) - n \cdot r$.
5) $m - (r + s)x + sx$.
6) $a - b(c - d) - (a - 2b)(c - d)$.
7) $x - (3y - 2z)(t - v) - (5y - 3z)(t - v)$.
8) $2ac + 2ad + 3bc + 3bd$.
9) $5bx + 10bc + 4cc + 2cx$.
10) $12ac - 15c + 8ab - 10b$.
11) $21a^2x + 15adx - 28ac - 20cd$.
12) $ac + ax - 2bx - 2bc$.
13) $a^3bc^2 - a^2b^4 - ac^5 + b^3c^3$.
14) $x^3y^5p^5 + xy^8z^4 - x^2z^7p^5 - y^3z^{11}$.
15) $12a^6x + 16a^3x^2y^2 - 15a^3y^4 - 20xy^6$.
16) $6a^5x - 8a^4y + 10a^2x^3y^2 - 21a^3x^2y^3 + 28a^2xy^4 - 35x^4y^5$.
17) $30 + 5a \cdot 5 - 6 \cdot 7b - 2b \cdot 5 - 5a \cdot 7b + 2b \cdot 7b$.
18) $mq + nq - mr + ns - pq - ps + pr + ms - nr$.
19) $4{,}5a^2x^3 + 2\frac{1}{7}b^2x^3 + 11{,}7a^2y^4 + 5\frac{4}{7}\,b^2y^4$.

III. Der zu zerlegende Ausdruck ist die Differenz zweier Quadrate (zweier gleichhoher gerader Potenzen); bei einzelnen Beispielen kommt auch Fall I und II in Anwendung.

Mündlich.

1) $m^2 - n^2$. 2) $x^2 - y^2$. 3) $m^3 - mn^2$.
4) $9x^2 - 16y^2$. 5) $36m^2 - 25n^2$. 6) $12m^2 - 27n^2$.
7) $16a^2 - b^2$. 8) $25x^2 - y^2$. 9) $7m^2 - 63n^2$.
10) $0{,}25x^2 - 0{,}49y^2$. 11) $0{,}81m^2 - 0{,}64n^2$. 12) $1 - m^2$.
13) $x^2 - 1$. 14) $49m^2 - 1$. 15) $1 - 25x^2$.

16) $a^2b^2 - m^2n^2$. 17) $144 - a^2b^2$. 18) $16a^2b^2 - 25m^2n^2$.

19) Man soll auf die kürzeste Weise berechnen: a) $57^2 - 43^2$; b) $163^2 - 37^2$; c) $273^2 - 27^2$.

Schriftlich.

1) $196a^8b^{12} - 361m^{16}n^{22}$. 2) $507x^4y^6 - 675z^{10}v^{12}$.
3) $0{,}0025a^2b^2 - 0{,}0049m^2n^2$. 4) $(m - n)^2 - x^2$.
5) $(2m - 3n)^2 - 4n^2$. 6) $(7m - 4n)^2 - 25m^2$.
7) $64m^2 - (7m - 4n)^2$. 8) $100a^2 - 9(5a - b)^2$.
9) $36(a - b)^2 - 49(x - y)^2$. 10) $(m + 3n)^2 - 25(2n - p)^2$.
11) $(x + y)^2 - (x - y)^2$. 12) $(m^2 + n^2)^2 - m^2n^2$.
13) $m^4 - n^4$. 14) $a^4 - b^4$. 15) $1 - a^4$.
16) $x^4 - 1$. 17) $81m^4 - 16n^4$. 18) $81a^4b^4 - c^8$.
19) $m^8 - n^8$. 20) $a^8 - 1$. 21) $x^9 - xy^8$.
22) $6561a^{48}b^{24} - 256c^{32}d^{16}$. 23) $20a^3b - 45ab^3$.
24) $x^5 - xy^4 + x^4y - y^5$.

IV. Die algebraische Summe ist entweder ein vollständiges Quadrat oder ein vollständiger Kubus eines Binoms oder Trinoms.

Mündlich.

1) $x^2 + 2xy + y^2$. 2) $x^2 - 2xy + y^2$.
3) $a^2 + 2ax + x^2$. 4) $25a^2 + 10ab + b^2$.
5) $x^2 - 12xy + 36y^2$. 6) $9a^2 - 30ab + 25b^2$.
7) $64x^2 - 160xy + 100y^2$. 8) $25m^2 - 60mn + 36n^2$.
9) $1 + 2a^2 + a^4$. 10) $x^2 - 2x + 1$.
11) $x^3 + 6x^2 + 9x$. 12) $36x^3 - 48x^2y + 16xy^2$.
13) $196a^3b - 336a^2b^2 + 144ab^3$. 14) $n^5 - 2n^4 + n^3$.
15) $256x^4 - 32x^2 + 1$. 16) $m^2 + 2mn + n^2 - p^2$.
17) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. 18) $x^3 - 3x^2y + 3ay^2 - y^3$.

Schriftlich.

1) $4a^2 + 12ab + 9b^2 - c^2$. 2) $m^2 - 2mn + n^2 - p^2$.
3) $a^2 - 2ac + c^2 - b^2$. 4) $25a^2 - 70ab + 49b^2 - c^2$.
5) $m^2 - n^2 - 2np - p^2$. 6) $a^2 - 9b^2 - 24bc - 16c^2$.
7) $m^2 - n^2 + 2np - p^2$. 8) $x^2 - 25y^2 + 80yz - 64z^2$.
9) $4n^2p^2 - (n^2 + p^2 - m^2)^2$.
10) $(m^2 + 2m + 1 - n^2)(n^2 - m^2 + 2m - 1)$.
11) $(c^2 + 2cd + d^2 - a^2 + 2ab - b^2)(a^2 + 2ab + b^2 - c^2 + 2cd - d^2)$.
12) $(m^2 - n^2 - p^2)^2 - 4n^2p^2$.

V. Der zu zerlegende Ausdruck ist entweder die Summe oder die Differenz zweier Kuben (zweier gleichhoher ungerader Potenzen); man vergl. § 4, c Nr. 12—17!

Mündlich.

1) $a^3 + b^3$. 2) $m^3 + n^3$. 3) $x^3 + y^3$.
4) $a^3 - b^3$. 5) $g^3 - h^3$. 6) $x^3 - y^3$.

Schriftlich.

1) $27a^3 + b^3$. 2) $8x^3 + 27y^3$. 3) $8x^3 + y^3$.
4) $64x^3 + 125y^3$. 5) $0{,}008x^3 + 0{,}027y^3$. 6) $2\frac{10}{27}a^3 + 0{,}729b^3$.
7) $343x^3 + 512y^3$. 8) $729a^3 + 2197b^3$. 9) $3375m^3 + 2744n^3$.
10) $8x^3 - 27y^3$. 11) $27a^3 - 8b^3$. 12) $64x^3 - 1$.
13) $125x^3 - 216y^3$. 14) $729m^3 - 512n^3$. 15) $2197a^3 - 3375b^3$.
16) $m^4 - n^4$ *) 17) $x^5 + y^5$. 18) $x^5 - 1$.
19) $x^6 - y^6$. 20) $729 - x^6y^{12}$.

VI. Die algebraische Summe ist ein Trinom ohne Koëfficient im ersten und dritten Glied, also von der Form $x^2 + (a + b)x + ab$. Man vergleiche die Beispiele 9 bis 16 unter c des § 3!

Mündlich oder Schriftlich.

1) $x^2 + 12x + 35$. 2) $x^2 + 7x + 12$.
3) $x^2 + 22x + 105$. 4) $x^2 + 46x + 525$.
5) $x^2 + 16x + 63$. 6) $x^2 + 17x + 60$.
7) $x^2 + \frac{7}{12}x + \frac{1}{12}$. 8) $x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$.
9) $x^2 + \frac{12}{35}x + \frac{1}{35}$. 10) $x^2 + 0{,}8x + 0{,}15$.
11) $x^2 + 0{,}37x + 0{,}021$. 12) $a^2 + 7a + 12$.
13) $x^2 + 2x - 8$. 14) $x^2 + 4x - 45$.
15) $x^2 + 2x - 63$. 16) $x^2 + 20x - 96$.
17) $x^2 + 7\frac{1}{2}x - 4$. 18) $x^2 + \frac{1}{12}x - \frac{1}{12}$.
19) $x^2 + 0{,}4x - 0{,}21$. 20) $x^2 + 0{,}45x - 0{,}025$.
21) $x^2 - 4x - 21$. 22) $x^2 - 4x - 45$.
23) $x^2 - x - 56$. 24) $x^2 - x - 132$.
25) $x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}$. 26) $x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}$.
27) $x^2 - \frac{3}{4}xy - \frac{1}{4}y^2$. 28) $x^2 - 0{,}5x - 0{,}36$.
29) $x^2 - 8x + 15$. 30) $x^2 - 15x + 56$.
31) $x^2 - 27x + 180$. 32) $a^2 - 14a + 48$.
33) $a^2 - 9a + 20$. 34) $x^2 - \frac{19}{15}x + \frac{2}{5}$.

---

*) Man vergleiche mit dem erhaltenen Resultat das unter III, Nr. 13. Was geht daraus hervor? Wie wird man also derartige Ausdrücke zerlegen?

VII. Die algebraische Summe ist ein Trinom mit Koëfficienten in zwei oder in allen Gliedern; man vergleiche die Beispiele Nr. 17 bis 25 unter c des § 3!

Schriftlich.

1) $6x^2 + 19x + 15$. **2)** $20x^2 + 71x + 63$.
3) $10x^2 + 29x + 10$. **4)** $56x^2 + 151x + 99$.
5) $28x^2 + 69x + 35$. **6)** $15x^2 + 76x + 77$.
7) $\frac{1}{2}x^2 + 6\frac{1}{3}x + 20$. 8) $0{,}15x^2 + 3{,}1x + 10$.
9) $15a^2 + 39ab + 24b^2$. **10)** $42x^2 + 79xy + 35y^2$.
11) $28m^2 + 11mn - 30n^2$. **12)** $45x^2 + xy - 28y^2$.
13) $99p^2 - 37pq - 10q^2$. **14)** $143m^2 - 16mn - 15n^2$.
15) $21a^2 - 45ab + 24b^2$. **16)** $81x^4 - 99x^2 + 30$.

II. Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Maßes und des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen.

a) Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Maßes.

α) Durch Faktorenzerlegung.

Schriftlich.

Man suche das größte gemeinschaftliche Maß durch Faktorenzerlegung zwischen:

1) $a^2 - 9$ und $a^2 - 6a + 9$.
2) $a^2 - 16$ und $a^2 + a - 20$.
3) $a^2 - b^2c^2d^2$ und $a^2 + 2abcd + b^2c^2d^2$.
4) $7a^2 - 7$ und $5a + 5$ und $a^2 - a - 2$.
5) $6a^2x + 12abx + 6b^2x$; $10a^2x - 10b^2x$; $28acx + 28bcx - 42adx - 42bdx$ und $4a^2x - 2abx - 6b^2x$.
6) $23744a^2b^3(x + y)^2$ und $11968ab^2(x + y)$.
7) $64a^3b^2c^4(4a^2 - 9b^2)$ und $80a^4b^2c^3(2a + 3b)^2$ und $96a^2b^4c^3(2a - 3b)^2$.
8) $720(x^2-4)$ und $1080(x^2+x-6)$ und $2520(3xy+4x-6y-8)$.

β) Durch Division.

Schriftlich.

Man bestimme das größte gemeinschaftliche Maß nach dem gewöhnlichen Divisionsverfahren zwischen:

1) $15x^2 + 2x - 1$ und $30x^2 + 19x - 5$.
2) $3x^4 - 13x^3 - 7x^2 - 7x - 6$ und $6x^3 + x^2 + 7x + 6$.
3) $6x^3 + 13x^2 + 15x - 25$ und $2x^3 + 4x^2 + 4x - 10$.

4) $3a^5 - a^4 - 3a + 1$ und $3a^4 + a^3 + a^2 + a - 2$.
5) $5x^3 + 9x^2y + 3xy^2 - y^3$ und $30x^2 - xy - y^2$.

b) Aufsuchung des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen.

α) **Durch Faktorenzerlegung.**

Man bestimme das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von:

1) $5x - 5y$ und $3xz + 3yz$ und $tx^2 - ty^2$.
2) $a^2 - b^2$ und $a^2 - 2ab + b^2$.
3) $5a - 5b$ und $7ac + 7bc$ und $a^2f - b^2f$.
4) $(a - b)^2$ und $(a + b)^2$ und $(a - b)$.
5) $a^2 - 4ab + 4b^2$ und $a^2 - ab - 2b^2$ und $a + b$.

β) **Durch Division.**

Man vergleiche hierüber die Beispiele unter a) β!

II. Gebrochene Zahlen.

§ 6. Kürzen der Brüche.

Mündlich.

1) $\frac{14abcd}{56abgc}$. 2) $\frac{30mnp}{75mpr}$. 3) $\frac{acg}{cgh}$.

4) $\frac{18xyz}{54xzp}$. 5) $\frac{16mnpq}{64mpqr}$. 6) $\frac{xyu}{ty}$.

7) $\frac{5n(m - p - q)}{15r(m - p - q)}$. 8) $\frac{m(a - b - c)}{p(a - b - c)}$.

9) $\frac{30(x - y)(m + n)}{45(m + n)(x - y)}$. 10) $\frac{(m - n)(a - b)(a + b)}{(a + b)(m - n)}$.

11) $\frac{15(m - n) \cdot 7(p - q) \cdot 24(r - s)}{8(r - s) \cdot 45(m - n) \cdot 35(p - q)}$.

12) $\frac{x - y}{x^2 - y^2}$. 13) $\frac{3x + 1}{9x^2 - 1}$.

Schriftlich.

1) $\frac{15a^3b^2}{20a^2b^3}$. 2) $\frac{3ab - 4ac + 5ad}{5ag - 9ah + 11am}$.

3) $\frac{21a^3b + 28ab^4}{35a^4b - 49abf^2}$. 4) $\frac{by + y^3}{3cy - dy}$.

5) $\frac{ax^3 - bx^5 - x^8}{3bx^3 + x^5}$. 6) $\frac{27a^4b^4c - 45a^2bdf^4g^3}{63a^7b^3x + 54a^2bd^3fg^2}$.

7) $\frac{55x^4y - 44x^2y^4}{33x^5y + 77x^2y^2}$. 8) $\frac{36a^5m^2 + 84a^3m^6}{60a^6m^2 - 108a^3m^4}$.

9) $\frac{18a^2 - 6ab}{21ac - 7bc}$.
10) $\frac{45xz - 27yz}{40x^2 - 24xy}$.

11) $\frac{45m^2 - 40mn^2}{63mn - 56n^3}$.
12) $\frac{55x^4 - 25x^2y^3}{44x^2y^3 - 20y^6}$.

13) $\frac{65a^4 - 35ab^4}{117a^3b^2 - 63b^6}$.
14) $\frac{36xyz - 60z^2}{33x^2y - 55xz}$.

15) $\frac{15agx + 20bgx - 25cgx}{10agx - 5dgx - 15fgx}$.

16) $\frac{35a^7b^5c - 42a^8b^4d^3 + 21a^4b^3d^4fg}{21a^6b^4c + 35a^4b^3fg - 49a^5b^7}$.

17) $\frac{15x^3 - 10x^2y + 20x^2z}{18xy^3 - 12y^4 + 24y^3z}$.

18) $\frac{35m^3 - 49m^2n + 56m^2q^2}{45mn^2 - 63n^3 + 72n^3q^2}$.

19) $\frac{15ac + 18ad + 20bc + 24bd}{6ac + 9ad + 8bc + 12bd}$.

20) $\frac{8xz - 12ax - 10yz + 15ay}{16xz + 20ax - 20yz - 25ay}$.

21) $\frac{ac + ad + bc + bd}{3ac + 4ad + 3bc + 4bd}$.

22) $\frac{3x^2z - 2ax^2 + 3y^2z - 2ay^2}{5x^2z - 4ax^2 + 5y^2z - 4ay^2}$.

23) $\frac{m^2p^4 - m^2q^2 - n^3p^4 + n^3q^2}{3m^2p^2 + 2m^2q^3 - 3n^3p^2 - 2n^3q^3}$.

24) $\frac{3x - 4y}{9x^2 - 16y^2}$.
25) $\frac{9x + 1}{81x^2 - 1}$.
26) $\frac{x^2 - y^2}{xz + yz}$.

27) $\frac{x^2 - 1}{xy + y}$.
28) $\frac{5a^2 + 5ab}{a^2 - b^2}$.

29) $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$.
30) $\frac{9x^5 - 4x}{6x^2b^2 - 4b^2}$.

31) $\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 - b^2}$.
32) $\frac{(x - 1)^2}{x^2 - 1}$.

33) $\frac{(4x - 3)^2}{16x^2 - 9}$.
34) $\frac{a^3 - x^3}{(a - x)^2}$.

35) $\frac{a^3 + x^3}{(a + x)^2}$.
36) $\frac{x^3 + x^2y}{x^2 + 2xy + y^2}$.

37) $\frac{12a + 16b}{9a^2 + 24ab + 16b^2}$.
38) $\frac{a^4 - b^4}{a^2 + 2ab + b^2}$.

39) $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$. 40) $\frac{a^3 - 2a^2}{a^2 - 4a + 4}$.

41) $\frac{a^2 + 2a - 3}{a^2 + 5a + 6}$. 42) $\frac{a^2 + a - 6}{a^2 + 5a + 6}$.

43) $\frac{2am + bm + bd + 2ad}{4a^2 - b^2}$.

44) $\frac{3a^2b - 2a^2c + a^2d - 3b^3 + 2b^2c - b^2d}{3a^2b + 6ab^2 + 3b^3 - 2a^2c - 4abc - 2b^2c + a^2d + 2abd + b^2d}$.

45) $\frac{25x^2 + 10xy - 63y^2}{25x^2 - 49y^2}$. 46) $\frac{64x^6 - 729y^6}{8x^3 + 27y^3}$.

47) $\frac{5x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x - 2}{x^5 + x^3 + x^2 + 1}$.

48) $\frac{9x^4 - 24x^2y^2 + 16y^4}{27x^6 - 108x^4y^2 + 144x^2y^4 - 64y^6}$.

49) $\frac{686a^6 - 1458a^3b^3}{98a^5 + 126a^4b + 162a^3b^2}$.

50) $\frac{9a^5 + 6a^4 + 27a^3 + 5a^2 + 20a - 4}{12a^4 - a^3 + 14a^2 - 19a + 3}$.

51) $\frac{6x^3 + 13x^2 + 15x - 25}{2x^3 + 4x^2 + 4x - 10}$.*)

52) $\frac{1728x^3 - 2197y^3}{1008x^3 + 1092x^2y + 1183xy^2}$.

53) $\frac{6a^5 + 3a^4 - 8a^3 - a^2 - 4}{6a^4 + 11a^3 + 4a^2 + 3a + 4}$.

§ 7. Addition und Subtraktion der Brüche.

I. Die Brüche sind gleichnamig.

Mündlich.

1) $\frac{2a}{c} + \frac{3a}{c}$. 2) $\frac{6a}{x} - \frac{4a}{x}$. 3) $\frac{3b}{c} + \frac{6d}{c}$.

4) $\frac{a - b}{d} + \frac{b}{d}$. 5) $\frac{m + n}{a} - \frac{n}{a}$. 6) $\frac{m}{3} - \frac{n + p}{3}$.

7) $\frac{a}{4} - \frac{b - c}{4}$. 8) $\frac{m}{11} - \frac{m - 11n}{11}$. 9) $\frac{a}{12} - \frac{a - 12b}{12}$.

*) Um den Nutzen dieser und ähnlicher Übungen für das Berechnen von Ausdrücken dem Schüler zu zeigen, kleide man diese Aufgaben etwa so ein: Man berechne den Ausdruck ꝛc. für x = 3,455. Wollte der Schüler hier ohne weiteres den Wert einsetzen, so würde sich eine höchst umständliche Rechnung ergeben.

Schriftlich.

1) $\frac{x - m}{x + y + z} + \frac{y - z}{x + y + z} + \frac{2z + m}{x + y + z}$.

2) $\frac{6a - 7b - 8c}{a - b + c} + \frac{4a + 10b + 11c}{a - b + c} + \frac{2c - 5a - 8b}{a - b + c}$.

3) $\frac{m}{5} - \frac{n - p}{5} + \frac{q - m}{5} - \frac{p + q - 6n}{5}$.

4) $\frac{18x - 13y}{5z} - \frac{5x - 2y}{5z} - \frac{9y}{5z}$.

5) $\frac{15x - 8y}{3a - 4b} - \frac{10x + 7y}{3a - 4b} - \frac{x - y}{3a - 4b}$.

II. Es sind ganze Zahlen und Brüche zu addieren.

Mündlich.

1) $a + \frac{b}{c}$. 2) $a - \frac{b}{c}$. 3) $\frac{2a}{bc} + c$.

4) $\frac{xy}{z} - a$. 5) $7 + \frac{5a + 4b}{3a}$. 6) $9 - \frac{6x - 5y}{4x}$.

7) $18 - \frac{3a - 4b + 5c}{3a}$. 8) $m - n - \frac{m - n - p}{2}$.

Schriftlich.

1) $5m - 6n - \frac{3m^2 - 8mn + 7p}{7m}$.

2) $9a - 4b + 5c - \frac{7a^2 - 5ab + b^2}{a - b} - \frac{2ac - 9bc - 3a^2}{a - b}$.

III. Die Brüche sind ungleichnamig.

a) Zähler und Nenner sind Monome.

Mündlich.

1) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$. 2) $\frac{am}{p} + \frac{oq}{r}$. 3) $\frac{4a}{5} + \frac{6a}{7}$.

4) $\frac{3}{4a} + \frac{6}{7b}$. 5) $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$. 6) $\frac{1}{2a} + \frac{2}{3b}$.

Schriftlich.

1) $\frac{a}{xy} + \frac{b}{x} + \frac{c}{xyz}$. 2) $\frac{bx}{y} + \frac{ac}{h} - \frac{cx}{k}$.

3) $\frac{3a}{5b} + \frac{c}{4d} + y$. 4) $\frac{ag}{4bx} - \frac{5cd}{12by} + \frac{3}{4}$.

5) $5 + \frac{4a}{b} - \frac{6b}{c}$. 6) $\frac{5a}{3b} - \frac{7b}{4c} + \frac{3c}{2a}$.

7) $\frac{5a}{4x^2} + \frac{3c}{5xy} - 7 + \frac{b}{12y^2}$.

8) $\frac{m^2}{x^3} + \frac{n}{x^2} + \frac{q}{x}$. 9) $\frac{x^2}{yz^2} - \frac{y^2}{x^2z} + \frac{z^2}{y^2x}$.

10) $\frac{2m}{n} + \frac{3m^2}{2n^2} - \frac{4m^3}{3n^3} + \frac{5m^4}{4n^4} + \frac{6m^5}{5n^5}$.

11) $\frac{-5}{7} + \frac{2b^2}{x^2} + \frac{3c^2}{xy} - \frac{4d^2}{y^2} - \frac{5f^3}{2xy} + \frac{8c^2}{3x^2}$.

b) Die Zähler sind algebraische Summen, die Nenner Monome.

Schriftlich.

1) $\frac{5b - c}{2} + \frac{3b - 5c}{4}$. 2) $\frac{2b + 3c}{7} + \frac{3b - 4c}{2}$.

3) $\frac{5x + y}{6} + \frac{11x - 5y}{9}$. 4) $\frac{2x + 3y}{5} - \frac{4y - 3x}{3}$.

5) $\frac{5b + 4c}{12} - \frac{3c - 7b}{5}$. 6) $x - \frac{x + y}{2} - \frac{x - y}{4}$.

7) $x - \frac{x + y}{2}$. 8) $x - y - \frac{x - y - z}{3}$.

9) $\frac{a}{6} - \frac{b - a}{5} + \frac{c + d}{2} + \frac{2a + 4b}{3}$.

10) $\frac{13a - 4b}{3} - \frac{6a + 3b}{4} - \frac{7b - 10a}{5} + \frac{9a - b}{15}$.

11) $\frac{a}{3} - \frac{3a + 2b}{5} + \frac{5a - 8b}{10} - \frac{a + b}{4}$.

12) $\frac{3a - 4b + 5c}{4} - \frac{a - b - c}{5} - \frac{14a - 13b - 8c}{6}$.

13) $\frac{6a - 5b + 4c}{5} - \frac{a}{2} - \frac{3 - a + 4b}{9} - \frac{2a - b}{3} + 6$.

14) $\frac{3m - 4n + p}{5} - \frac{4m + 5p - 6n}{8} + \frac{8m + 10n - 11p}{12} - \frac{10m + n - p}{15}$.

15) $\frac{3a - 4c}{ac} - \frac{3b - 3}{c} + \frac{4 - 5a}{a} - \frac{5}{2ac}$.

16) $\frac{2ab - 6a}{5b} - \frac{3c - ad}{2d} + \frac{bc + 3ad}{3bd}$.

17) $\frac{7b - 4a}{3b} - \frac{3c - y}{3y} + \frac{ay + bc}{by} - \frac{5}{6}$.

18) $\frac{-3a}{2b} + \frac{6b - a}{4b} - \frac{3a + 2b}{3a} - \frac{5a - 9b}{4a}$.

19) $\frac{(x + y)^2}{4xy} - 1$.   20) $\frac{(x - y)^2}{4xy} + 1$.

21) $7a - \frac{(4 - 3a)^2}{2a}$.   22) $3x - \frac{(3x - 1)^2}{3x}$.

23) $21x + 24y - \frac{(2x - 5y)^2}{4x} - \frac{19x}{3} - \frac{(x + 3y)^2}{2x}$.

c) Unter den Nennern kommen algebraische Summen vor.

Schriftlich.

1) $\frac{3a^2 - 4b^2}{2a - b} + \frac{2a + b}{4}$.   2) $\frac{6a^2 + 5b^2}{a - 3b} + \frac{7a + 9b}{3}$.

3) $\frac{5a - 7}{2a - 10} + 3 + \frac{4a + b}{3}$.   4) $\frac{5x + 8y}{3x} + 5 - \frac{8x - 5y}{3x - 2y}$.

5) $\frac{x}{7a + 13} - \frac{5}{3a + 10}$.   6) $\frac{3}{6a + 7} + \frac{7}{5a - 6}$.

7) $\frac{1}{5a + 3} - \frac{1}{2a - 5} + \frac{4a - 5b}{4}$.

8) $\frac{3a - 8x}{2a - 5x} + \frac{4a - 7x}{5a - 9x} + \frac{5}{6}$.

9) $\frac{2a + 4b}{a + 6b} - \frac{2a + 4b}{a - 6b} - \frac{-24ab - 50b^2}{a^2 - 36b^2}$.

10) $\frac{a + x}{a - x} - \frac{a - x}{a + x}$.   11) $\frac{a - x}{a + x} - \frac{a + x}{a - x}$.

12) $\frac{1 - x}{1 + x} - \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$.   13) $\frac{x - a}{x - y} - \frac{y - a}{x - y}$.

14) $\frac{1}{x - y} - \frac{1}{x + y}$.   15) $\frac{x^2 + y^2}{x + y} - (x - y)$.

16) $a + b - \frac{a^2}{a - b}$.   17) $\frac{x^2}{x - y} - (x + y)^2$.

18) $\frac{3a + 2x}{a + x} - \frac{5a - x}{a - x} + \frac{a}{2x}$.

19) $\frac{5x - 3y}{6x^2 + 6xy} - \frac{2x - 3y}{3x^2 - 3xy}$.

20) $\frac{ac}{a^2 - 4x^2} + \frac{bd}{ac + 2cx}$.

21) $\frac{x^3}{(x + y)^3} - \frac{xy}{(x + y)^2} + \frac{y}{x + y}$.

22) $\frac{2ab + b^2}{a^2 - 2ab + b^2} - \frac{a^2 + 5ab}{a^2 + 2ab + b^2} - \frac{b}{a - b}$.

23) $\frac{3a}{(a - 2b)^2} + \frac{2a + b}{(a + b)(a - 2b)} - \frac{5}{a + b}$.

24) $\frac{5a - 3b}{(a - b)^2} - \frac{5a - b}{a^2 - b^2}$.

25) $\frac{a^2 + 2b^3 - b^2}{a^2 - b^2} + \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b} - \frac{a^2 - ab + b^2}{a - b}$.

26) $\frac{5}{a - 1} - \frac{3}{a - 2} - \frac{2}{a - 3}$.

27) $\frac{x + 2}{3x - 6} - \frac{x - 2}{2x + 4} + \frac{x^2 - 16x + 4}{5x^2 - 20}$.

28) $\frac{2a + 3b}{15mx - 10my} + \frac{5c - 4b}{6ny - 9nx} - \frac{c + 5a}{12px - 8py}$.

29) $\frac{2}{x + 1} - \frac{2}{x - 1} + \frac{x}{x^2 - 1} - \frac{2x - 1}{(x + 1)^2} + \frac{2x - 1}{(x - 1)^2} - \frac{x^2 + 5}{(x^2 - 1)^2}$.

30) $\frac{10a + 25b}{25a^2 - 4b^2} - \frac{342ab - b^2}{50a^3 - 8ab^2 - 125a^2b + 20b^3}$
$+ \frac{a + 64b}{10a^2 - 29ab + 10b^2}$.

31) $\frac{2x + 5}{x^2 + 3x - 10} - \frac{3x - 7}{x^2 + 4x - 12} + \frac{8x - 5}{x^2 + 11x + 30}$
$- \frac{6x + 7}{x^2 - x - 30}$.

32) $\frac{2a - 4b}{21a + 7b} - \frac{9a - 15b}{2a - 4b} - \frac{2a^2 - 3ab + 5b^2}{42a^2 - 70ab - 28b^2}$.

33) $\frac{10a - 5x}{6a^2 - 24x^2} - \frac{6a - 15x}{8a^2 - 12ax - 8x^2} - \frac{2a - 4x}{6a^2 + 15ax + 6x^2}$
$- \frac{2a^2 - 7ax}{24a^3 + 12a^2x - 96ax^2 - 48x^3}$.

34) $\frac{15x^2 - 21x}{36x^2 - 4} - \frac{9x^2 + 6x + 1}{30x^2 + 32x - 14}$
$- \frac{3x^3 - 55x^2 - 112x - 8}{90x^3 + 126x^2 - 10x - 14}$.

35) $\frac{65ax - 143bx}{35ax - 77bx + 45ay - 99by} - \frac{49x^2 + 126xy + 81y^2}{49x^2 - 81y^2}$
$+ \frac{343x^3 - 729y^3}{147x^3 + 189x^2y + 243xy^2} + \frac{6x^5 + 9x^3y^2}{98x^4 - 15x^2y^2 - 243y^4}$.

§. 8. Multiplikation der Brüche.

a) Multiplikation eines Bruches mit einer ganzen Zahl.

Mündlich.

1) $\frac{a}{c} \cdot b.$ 2) $-\frac{ab}{c} \cdot a.$ 3) $\frac{a+x}{c} \cdot y.$

4) $\frac{ax+yz}{c+d} \cdot f.$ 5) $\frac{5a-7b}{6cx} \cdot 3ac.$ 6) $\frac{3ab}{cd+fg} \cdot h.$

7) $\frac{5a-7b}{8x-11} \cdot 4.$ 8) $\frac{3b-8c}{12abc-20acx} \cdot 4ac.$

Schriftlich.

1) $\frac{13am}{12bc} \cdot 16cf.$ 2) $\frac{5x-3y-11z}{21xyv} \cdot -35xyz.$

3) $\frac{3a+2b}{2a-7b} \cdot (2a-7b).$ 4) $\frac{5x+6y}{x(3a+5b)} \cdot (3a+5b).$

5) $\frac{8ab}{(60x^2y^3b)(75mp)} \cdot 15x^2y^3.$ 6) $\frac{xyz}{(m^3n^5p^6)(m^8n^7p^3)} \cdot m^3n^4p.$

b) Multiplikation einer ganzen Zahl mit einem Bruch.

Mündlich.

1) $a \cdot \frac{b}{c}.$ 2) $x \cdot \frac{y}{z}.$ 3) $36x^3y^5 \cdot \frac{1}{12x^2y^3}.$

4) $(9a^2-16b^2) \cdot \frac{3}{3a+4b}.$ 5) $(x^3-y^3) \cdot \frac{5a}{x^2+xy+y^2}.$

Schriftlich.

1) $35a^3b^4c^5 \cdot \frac{2d}{7a^3b^2c^2}.$ 2) $68x^6y^5z \cdot \frac{4a}{17x^4y^5z}.$

3) $21(m+n^2)(x^2+y) \cdot \frac{8}{35(m+n^2)(x^2+y)t}.$

4) $(432m^2-867n^2) \cdot \frac{12m-17n}{36m+51n}.$

5) $\frac{36a^2b-60c^4+84d^5}{432m^2r-144nr+540m^2s-180ns} \cdot (6m^2-2n)(12r+15s).$

c) Multiplikation von Brüchen mit Brüchen.

Mündlich.

1) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}.$ 2) $\frac{-m}{n} \cdot \frac{p}{-q}.$

3) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \cdot \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$ 4) $\frac{x^3-y^3}{5} \cdot \frac{10}{x^2+xy+y^2}.$

Schriftlich.

1) $\frac{ad}{bc} \cdot \frac{bc}{ad}$. 2) $\frac{ax}{yz} \cdot \frac{dp}{fg}$.

3) $\frac{-8a}{5} \cdot \frac{-5b}{6}$. 4) $-\frac{3ab}{5cd} \cdot \frac{7mg}{9f}$.

5) $\frac{15ac}{28bx} \cdot -\frac{35xy}{18ag}$. 6) $\frac{-4bc}{5df} \cdot \frac{15gh}{8mn}$.

7) $-3ab \cdot \frac{2ac}{3dg} \cdot \frac{1}{5af} \cdot -\frac{4mq}{3ac}$.

8) $\frac{9a - 10b}{3(7ac - 5bc)} \cdot \frac{3(8am - 9cn)}{5(9a - 10b)}$.

9) $\frac{x(a + b + c)}{yz} \cdot \frac{bxz}{5(a + b + c)} \cdot \frac{5z}{b}$.

10) $\frac{a - x}{c + d} \cdot \frac{c + d}{a + x} \cdot \frac{g}{a - x} \cdot \frac{a + x}{g}$.

11) $\frac{21x^5y^3}{16m^8n^7} \cdot \frac{48x^3m^9}{35n^8y^4} \cdot \frac{38m^{11}n^3}{15x^8y^{11}} \cdot \frac{45xm}{19y^3n}$.

12) $\frac{46(m + n)}{27(a - b)} \cdot \frac{81(x + y)}{69(m + n)} \cdot \frac{a - b}{8(x + y)}$.

13) $\frac{x^2 - y^2}{m^2 - n^2} \cdot \frac{m^2 + mn}{x^2 - xy} \cdot \frac{x}{m}$.

14) $\frac{xy^2 - x}{y^2z - z^3} \cdot \frac{y^2z - yz^2}{xy^2 - 2xy + x}$.

15) $\frac{40m^2 - 48mn}{6x^2y + 4x^2z} \cdot \frac{3my + 2mz}{20mn^2 - 24n^3} \cdot \frac{x^3}{m}$.

16) $\frac{48a^2x^2 - 75b^2x^2}{100m^2y^3 - 144n^2y^3} \cdot \frac{10m - 12n}{36ax + 45bx} \cdot \frac{40my + 48ny}{20a - 25b}$.

17) $\frac{21a^2 - 45ab + 24b^2}{121a^2 - 196b^2} \cdot \frac{121a^2 - 308ab + 196b^2}{343a^3 - 512b^3}$
$\cdot \frac{147a^2 + 168ab + 192b^2}{11a - 14b}$.

18) $\frac{15ac + 18ad + 20bc + 24bd}{21ax + 28bx} \cdot \frac{125c^3 - 216d^3}{25c^2 - 36d^2}$
$\cdot \frac{14x^2}{25c^2y^2 + 30cdy^2 + 36d^2y^2}$.

d) Multiplikation zusammengesetzter Buchstabenausdrücke.

Schriftlich.

1) $\left(\frac{4a^2}{5b^3} - \frac{7a^3}{9b^2} + \frac{6f^4}{11g^5}\right) \cdot -\frac{5ah^2}{6ck^3}$.

2) $\frac{6a^3b^5}{7c^4d^6} \cdot \left(\frac{14c^5d^3}{15a^6b^2} - \frac{21m^2n}{8a^3b^2} - \frac{35x^2d^6}{24a^2b^5}\right)$.

3) $\left(\frac{3ab}{2cd} - \frac{4ad}{5cf} + \frac{8ag}{7ch}\right)\left(-\frac{2ab}{3cd} + \frac{ad}{4cf}\right)$.

4) $(\frac{3}{4}a^2 - 7b + \frac{2}{3}c^3)(\frac{2}{3}a^2 + 5b - \frac{5}{2}c^2)$.

5) $\frac{15ab}{17mn} - \frac{5m^2n}{6a^2}\left(-\frac{6a^2}{17mn^2} + \frac{18a^3b}{17m^3n^2}\right)$.

6) $6 - \frac{m+n}{m-n}\left(\frac{m}{m+n} - \frac{m-n}{m} + \frac{6(m-n)}{m+n}\right)$.

7) $\left(\frac{3a^4b}{4cd} + \frac{5f^2g^3}{6h^2k^3} - 7ab\right)\left(\frac{2a^3b^2}{3cd} - \frac{7f^2g^3}{6h^2k^3}\right)$.

8) $\left(\frac{3a^4b^3}{5x^5} - \frac{4ab^7}{7x} + \frac{6b^{12}x^3}{a^4}\right)\left(\frac{2a^3b}{3x^2} + \frac{5b^6x}{8a} - \frac{b^9x^4}{a^3}\right)$.

9) $\left(\frac{5m^2}{7n^2} - \frac{15}{4} - \frac{10n^2}{9m^2}\right)\left(\frac{9m^3}{5n^2} - \frac{14n^2}{15m} - \frac{12m}{5}\right)$.

§ 9. Division der Brüche.

a) Division eines Bruches durch eine ganze Zahl.

Mündlich.

1) $\frac{36ab}{7} : 12ab$. 2) $\frac{108x^3y^4}{5} : 36x^3y^4$.

3) $\frac{a}{b} : c$. 4) $\frac{ab}{mn} : c$. 5) $\frac{5m}{3n} : 2mn$.

Schriftlich.

1) $\frac{64abc}{7mn} : 8ab$. 2) $\frac{85x^3y^4z^6}{16ab} : 17x^3y^4z^5$.

3) $\frac{169a(x+y)}{m+n} : (13(x+y))$.

4) $\frac{117(x^2+y^2)}{11(x+y)} : (39(x^2+y^2))$.

5) $\frac{63mn + 81mp}{4ab} : 9m$. 6) $\frac{65mx - 104my + 117mz}{7ab} : 13m$.

7) $\frac{24ab - 36a(m-n) + 60a(m+n)}{7xy} : 12a$.

8) $\frac{2ay}{5bcx} : 3ac$. 9) $\frac{9ab}{7x^2y^3} : 5xy$. 10) $\frac{5a - 7b}{5a + 9b} : 3a$.

b) Division einer ganzen Zahl durch einen Bruch.

Mündlich.

1) $x : \frac{y}{z}$. 2) $a : \frac{1}{c}$. 3) $m : \frac{n}{p}$.

4) $ab : \frac{n}{c}$. 5) $3am : -\frac{3bm}{5cy}$. 6) $-2a : -\frac{3m}{n}$.

Schriftlich.

1) $(m + n)x : \frac{m+n}{y}$. 2) $a(b - c) : \frac{ad(b-c)}{f}$.

3) $36m^8n^7p^5 : \frac{12p^5}{5m^{12}n^{13}}$. 4) $(33a^2 + 44ab) : \frac{11a}{b}$.

5) $(48a^3 - 27ab^2) : \frac{20a^2 - 15ab}{4a + 3b}$. 6) $(a^4 - a^2x^2) : \frac{a+x}{a-x}$.

c) Division eines Bruches durch einen Bruch.

Mündlich.

1) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$. 2) $\frac{x}{y} : \frac{z}{u}$.

3) $\frac{a+b}{a-b} : \frac{a+b}{a-b}$. 4) $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} : \frac{x + y}{x^2 + y^2}$.

Schriftlich.

1) $\frac{ac}{bd} : \frac{c}{d}$. 2) $\frac{3ac}{5bd} : \frac{7ad}{13bx}$.

3) $-\frac{5xy}{6zu} : -\frac{25xz}{18uv}$. 4) $\frac{44(a-b)}{35(m+n)} : \frac{55(a-b)}{49x(m+n)}$.

5) $\frac{23ab - 27cd}{mn} : \frac{10xy - 11yy}{5np}$.

6) $\frac{108a^6b^9}{185m^5n^3} : \frac{81a^4b^8}{74m^5n}$. 7) $\frac{245m^8n^7q^3}{212x^7y^9z^{10}} : \frac{196m^2n^5q^3}{159x^6y^8z^{10}}$.

8) $\frac{172(x+y)z}{141(m+n)r} : \frac{43(x+y)}{47(m+n)}$. 9) $\frac{x-y}{m+n} : \frac{x-y}{r+s}$.

10) $\frac{33x^5y^9 - 132x^6y^4 + 11x^3y^4}{52a^7b^8 + 104a^{10}b^9 - 26a^4b^5} : \frac{11x^3y^4}{13a^4b^5}$.

11) $\frac{8x(2a+5b) - (3x+2y)(2a+5b)}{(5x-2y)(9m-7n)} : \frac{2a+5b}{9m-7n}$.

12) $\frac{9x^{10}y^2 - x^6}{27x^4y^3 + 18x^2y^2 + 3y} : \frac{15x^2y^8 - 5y^7}{3x^5y + x^3}$.

13) $\frac{15ax + 40ay - 9bx - 24by}{55ay - 30ab - 33by + 18b^2} : \frac{3x + 8y}{11y - 6b}$.

14) $\frac{12ax - 15bx - 20ay + 25by}{21mx + 56nx + 33my + 88ny} : \frac{4a - 5b}{3m + 8n}$.

15) $\frac{12x^2y^3 + 15x^2z^3 - 21z^6}{8m^4 - 12m^3n^2 + 16m^3q} : \frac{24x^4y^3 + 30x^4z^3 - 42x^2z^6}{24m^2 - 36mn^2 + 48mq}$.

16) $\frac{a^4}{b^3c^5} : \frac{b^6}{c^3} : \frac{a^2}{b^2}$. 17) $\frac{36mn}{5xy} : \frac{6m}{2,5x} : \frac{4n^2}{3y} : \frac{2x}{3n}$.

18) $\frac{5mn}{2cd} : \left[\frac{15m^2}{28c^2} : \frac{3m}{7c}\right]$*).

19) $\frac{a^3b^2}{m^2n^3} : \left[\left(\frac{a^5n^2}{b^3m^2} : \frac{m^4n^2}{a^5b^7}\right) : \frac{a^2n^3}{b^2m^5}\right]$.

20) $\frac{12a^3b^2}{(x-y)^2} : \left[\frac{5(x-y)ab}{4(m-n)} : \left[\frac{5(m-n)}{18a^2b} : \frac{(m-n)^2}{5(x-y)^2}\right]\right]$.

d) Division zusammengesetzter Buchstabenausdrücke.

Schriftlich.

1) $\left(\frac{3ac}{4d} - \frac{5af}{6g} + \frac{8fm}{9gn} - 9\right) : -\frac{3c}{f}$.

2) $\left(\frac{a}{b} + \frac{fg}{m} - \frac{5xy}{7z} + 8\right) : -\frac{5fd}{7mn}$.

3) $\left(\frac{6a^2y^2}{5z^4} + \frac{5a^3y^4}{4z^5} - \frac{10a^4y^6}{z^6}\right) : -\frac{6a^3y^4}{11z^6}$.

4) $\frac{3a^2}{7b^3} : \left[\frac{5f}{6b^3} - \frac{8g}{7b} + \frac{2c}{3b^2}\right]$.

5) $\left(\frac{a^2}{3} + \frac{19ab}{8} - \frac{ac}{2} + \frac{9b^2}{4} - 3bc\right) : \left(\frac{a}{2} + 3b\right)$.

6) $\left(\frac{1}{12}x^2 + \frac{7}{120}xy - \frac{17}{144}xz - \frac{1}{10}y^2 - \frac{1}{30}yz + \frac{1}{24}z^2\right) : \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}z\right)$.

7) $\left(\frac{x^5y^2}{12} + \frac{x^4y^3}{240} - \frac{89x^3y^4}{630} + \frac{11x^2y^5}{840} + \frac{xy^6}{42}\right) : \left(\frac{x^3y}{4} + \frac{x^2y^2}{5} - \frac{xy^3}{6}\right)$.

8) $\left(\frac{10x^{12}y^3}{9} - \frac{7x^8y^6}{4} + \frac{923x^4y^9}{720} - \frac{617y^{12}}{16} - \frac{983y^{15}}{300x^4} - \frac{y^{18}}{3x^8}\right)$

$: \left(\frac{2}{3}x^4y^6 - \frac{9y^9}{10} - \frac{5y^{12}}{6x^4}\right)$.

§ 10. Vermischte Aufgaben zum ersten Abschnitt.

1) Man drücke durch Buchstaben in Verbindung mit den bekannten Operationszeichen (wenn nötig unter Anwendung von Klammern) aus:

*) Welche Form erhalten die nachfolgenden Beispiele 18—20, wenn man als Divisionszeichen ausschließlich den Bruchstrich verwendet?

a) Die Summe, die Differenz, das Produkt und den Quotienten zweier Zahlen;

b) die Summe, die Differenz, das Produkt und den Quotienten zweier Zahlen, durch eine dritte dividiert;

c) eine Zahl, dividiert durch eine Summe, eine Differenz, ein Produkt und einen Quotienten;

d) eine Summe, dividiert durch eine Summe, eine Differenz, ein Produkt und einen Quotienten;

e) eine Differenz, dividiert durch eine Summe, eine Differenz, ein Produkt und einen Quotienten;

f) ein Produkt, dividiert durch eine Summe, eine Differenz, ein Produkt und einen Quotienten;

g) das Produkt zweier Summen, zweier Differenzen, einer Summe und einer Differenz, zweier Quotienten;

h) die Summe der halben Summe und halben Differenz zweier Zahlen; die Differenz der halben Summe und halben Differenz zweier Zahlen!

2) Die nachfolgenden Sätze sollen sowohl in mathematischen Zeichen als in Worten ausgedrückt werden:

a) Was erhält man, wenn man die halbe Differenz zweier beliebiger Zahlen α) zur halben Summe dieser Zahlen addiert, β) von der halben Summe subtrahiert?

b) Was erhält man, wenn man von der größeren zweier Zahlen: α) die halbe Summe, β) die halbe Differenz subtrahiert?

c) Was erhält man, wenn man: α) die Summe zweier Zahlen mit ihrer Differenz multipliziert, β) von der Summe der Quadrate zweier Zahlen das Quadrat der Differenz der Zahlen subtrahiert?

3) Es sollen folgende Zahlenverbindungen zergliedert (analysiert) und für die Werte $a = 40$, $b = 18$, $c = 6$, $d = 2$ und $e = 3$ berechnet werden!

1) $(a - bc + d) : e$. 2) $a - (bc + d) : e$.

3) $a - b(c + d) : e$. 4) $[a - b(c + d)] : e$.

5) $a[b + c : (b - c : d)]$.

6) $a - [(bc - b) : d + cd]$.

4) Man stelle folgende Aufgaben in arithmetischer Form dar und berechne die in bestimmten Zahlen ausgedrückten:

a) Es soll die Summe der Zahlen $a = 5\frac{2}{3}$ und $b = 8\frac{5}{8}$ um den Quotienten aus $c = 5\frac{7}{16}$ in $d = 9\frac{3}{32}$ vermindert, diese Differenz

durch die Summe aus dem Produkt der Zahlen $f = 3\frac{1}{4}$ und $g = \frac{2}{3}$ und dem Quotienten aus $h = 1\frac{1}{8}$ in $k = 3\frac{3}{5}$ dividiert und zu dem erhaltenen Quotienten noch die Zahl $m = 4$ addiert werden!

b) Es soll der Quotient aus $m = 0{,}01$ in $n = 1{,}957$ um das Produkt aus $p = 9{,}86$ und $q = 7{,}5$ vermindert und diese Differenz multipliciert werden mit der Zahl, die sich ergibt, wenn man $r = 14{,}4592$ um den Quotienten aus $s = 190$ in $t = 58{,}9$ vermehrt und von dieser Summe das Produkt aus $x = 473{,}2$ und $y = 0{,}031$ subtrahiert!

5) Die folgenden Aufgaben sollen aufgelöst werden:

a) Ein Kaufmann hat an einer Ware A im ersten Jahre a Mark, an einer Ware B aber b Mark gewonnen; im zweiten Jahr hat er an der ersten Ware a_1 Mark, an der zweiten b_1 Mark gewonnen; im dritten Jahr beziehungsweise a_2 und b_2 Mark und im vierten Jahr a_3 und b_3 Mark. Wieviel hat er in jedem Jahre, wieviel an jeder Ware, wieviel im ganzen gewonnen?

b) Der Verkaufspreis einer Ware beträgt v ℳ, der Einkaufspreis e ℳ; wie groß ist der Gewinn g, den man an derselben hat?

c) Jemand nimmt nacheinander a, b, c, d und e ℳ ein und gibt hievon f und g ℳ aus; wieviel hat er noch?

d) Zwei Eisenbahnzüge begegnen sich mit den Geschwindigkeiten $c = 14$ und $c_1 = 12$ m in der Sekunde; wie weit sind sie nach einer Sekunde voneinander entfernt?

e) Jemand ist c Schritte vorwärts und hierauf d Schritte wieder zurückgegangen; wie weit ist er jetzt vom Anfangspunkt entfernt, je nachdem $c > d$, $c = d$ oder $c < d$ ist?

f) Ein Eisenbahnzug legt in jeder Sekunde n m zurück; wieviel in einer Minute, in einer Stunde?

g) Die Einheit einer Ware kostet b ℳ; was kostet eine Menge q derselben?

h) Die Geschwindigkeit einer Bewegung sei c (celeritas); wie groß ist der in der Zeit t (tempus) zurückgelegte Weg s (spatium)?

i) Wie groß ist die Geschwindigkeit c einer Bewegung, wenn in der Zeit t ein Weg von s m zurückgelegt wird?

k) In welcher Zeit t wird der Weg s zurückgelegt bei einer Geschwindigkeit c?

l) q m einer Ware kosten p ℳ, was kostet die Einheit?

m) Ein Thermometer zeigte abends p^0 über Null und fiel nachts q^0 unter Null. Wieviel Grad fiel dasselbe?

6) $3a - [-6b + ((6 + 5c) - (3a + c)) - (9a^2 + 6ab)] - [(8a - 8) - ((5a^2 + 6ab - 8c) - (3 + 10ab))] - (12a^2 + (13ab - 5a + 15bc - 9))$.

7) $\frac{3}{4}a - (\frac{2}{3}b + (\frac{1}{2}c - \frac{3}{7}d)) - [\frac{4}{5}a - (-(c - \frac{7}{12}d) - \frac{8}{9}b)]$.

8) $\frac{5}{8}a - [-\frac{3}{4}b - (-\frac{7}{12}a - (\frac{3}{5}b - \frac{5}{6}c))] - [(\frac{1}{8}a - \frac{3}{7}c) - ((\frac{3}{4}a + \frac{2}{3}b) - \frac{1}{2}c)]$.

9) $9{,}75a - [5a - (0{,}5a - (3{,}3b + 0{,}5c) - 11{,}4a) - 15{,}9b] - [(3{,}5a + 0{,}8b) - (0{,}2a + (0{,}7b - 5{,}2c))]$.

10) $4x - 5y \cdot (6z - (5a - 6x)) + (2x - 5y) \cdot ((6z - 5a) - 7x) - (2 + (3z - 5x - 7a)) \cdot 4x$.

11) $(6 + 5a - (6b + 8c)) \cdot 3c - a \cdot ((7b - 3c) - (5a - 3b)) - (2a + 3b) \cdot (5 - (3a + 5b)) - 15a(3b + 4c)$.

12) $(\frac{4}{5}a + \frac{2}{3}b)(\frac{5}{6}a - \frac{3}{4}b)$.

13) $(\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b + \frac{3}{4}c)(\frac{1}{6}a + \frac{2}{7}b - \frac{3}{8}c)$.

14) $\left(\frac{4a}{5b} - \frac{3b}{11a} - \frac{3}{a}\right)\left(\frac{5a}{6b} - \frac{7b}{8a} + \frac{1}{3a}\right)$.

15) $\left(\frac{30aa}{7} + \frac{3bc}{8} - \frac{8aac}{25b}\right) : \frac{4ab}{7b}$.

16) Man multipliciere $\left(\frac{2a}{5b} - \frac{3a}{4} + \frac{5b}{3} - \frac{c}{d}\right)$ mit $\left(\frac{5a}{7b} + \frac{2a}{3} + \frac{3b}{2}\right)$ und dividiere hierauf das erhaltene Produkt durch einen dieser Faktoren!

17) $5 + 4 \cdot -3 - 5 \cdot -3$. 18) $6 \cdot -4 + 8 \cdot 4 - 3 \cdot 5$.

19) $(9 \cdot 3 - 3 \cdot 5) : -4$. 20) $(10 - 2 \cdot 6 + 8) : (6 - 8)$.

21) $(9 - 2 \cdot 15 + 5) - (6 \cdot 4 - 3) : 3 - (5 - 3 \cdot 2)$.

22) $(5 - 10 \cdot -4) : (120 : 15 + 1) + 36 - 6 : (9 - 5 \cdot (12 - 15) - 63 : 3) + 8$.

23) $105 - [3 - (5 \cdot -2 - [12 - 15 : -5 + (6 - 11) - 3] - 15) + 6]$.

24) $330 - [5 - (6 \cdot -5 - (19 - 26 : -13 + 13) - 27 : -9) + 6] \cdot -5$.

25) $\left(\frac{m}{a+b} - \frac{n}{a+b} + \frac{p}{a+b} - \frac{2q}{a+b}\right)(a + b)$.

26) $12a + \frac{2a - 3b}{c} \cdot c - \frac{5a - 3b + 2c}{m + n}(m + n)$
$- \frac{6a + 5b}{b} \cdot b$.

27) $p - (m - n) : \frac{m - n}{p + r}$.

28) $\frac{mnp + mnq - mpq + npq}{mnpq}$.

29) $m - \frac{51x \cdot y - 68xx + 17x \cdot m - 85xy}{17x}$.

30) $16a - \frac{(3a - 4b) \cdot 3p - 4(3a - 2b \cdot 3p + 2(5a - 3b) \cdot 3p}{3p}$.

31) $\frac{84a(m + n)}{xy} : 12(m + n)$.

32) $\frac{75(x + y)}{9(m + n)} : 75(x + y)$.

33) $\frac{3}{5b} - \frac{3}{m + n}\left(\frac{m + n}{5b} - m - n\right)$.

34) $\left(\left(\frac{11 - 18\frac{1}{4}}{15,5 : 4 - 138,5 : 100} - \frac{4,5 + 0,36 : 0,9}{6 : 7,5 - 2,1}\right.\right.$
$\left.+ \frac{0,15 : 0,1 - 5,8}{8 : 2,5 - 2}\right) \cdot 3 + \left.\frac{30 - 35,6}{2,5}\right) : \frac{\frac{17}{5} - 11}{\frac{5}{2} - 0,8}$
$+ \frac{3\frac{7}{8} - 5,25}{1,25 - 0,3 \cdot 4,1}$. (Nicht aufgehende Divisionen führe man auf 3 Dezimalstellen fort).

35) $\frac{2((0,69 - 0,25)(2 - (0.75 - 1,5))2,04 - 0,46) - 0,008 \cdot 2,1}{-4,5:(3,5 - 2) + (1 - 0,08):(0,2:0,05) - (4 - 2,5):100 + 135:7:20}$.

36) $12a + 11a^3 - 19a^5 + 24a^4 + a^2) \pm (-16a^5 + 17a^2$
$- 30a + 24a^3 + a^4)$.

37($\frac{4}{5}a^4x - \frac{5}{6}a^2x^3 + \frac{6}{7}a^3x^2 - \frac{5}{8}ax^4) \pm (\frac{2}{3}a^3x^2 - \frac{3}{4}a^4x - \frac{1}{2}ax^4$
$+ \frac{2}{9}a^2x^3)$.

38) $4a^2 - [6b^3 - (8a^2 - (-3b^3 - 5a^2) - 6b^3) - 7ab^2]$
$+ 9ab^2$.

39) $4,5a^2 - [8,3b^3 + (6,1a^2 - (7,3a^2 + 5,9b^3) + 0,1a^2)$
$- 11,5b^3] - 12a^2$.

40) $\left(\frac{-b^6}{7a^3x^5} + \frac{4a^4y^3}{5b^5x^5} - \frac{33b^6y^3}{17ax^6}\right) : \frac{-11b^5y^2}{12a^3x^5}$.

41) $\frac{3a^2b}{cx^2} : \left[\left(\frac{8a^3}{25c^2} : \frac{4x^3}{5b^2}\right) : \frac{6b^4c^2x}{5a^3}\right]$.

42) $\frac{a^5}{5b^2c^{12}} : \left[\frac{4a^3c^3}{3b} : \left(\left(\frac{5b^4c^6}{2a} \cdot \frac{4ac^3}{b^3}\right) : \left(\frac{3ab}{4c^3} : \frac{bc^6}{2a^3}\right)\right)\right]$.

Zweiter Abschnitt.

Potenzen.

§ 11. Die Potenzen im allgemeinen.

Mündlich.

1) Man merke die Quadrate der Zahlen von 1 bis 25 und die Kuben von 1 bis 15!

2) Man berechne folgende Potenzen: 3^4, 2^5, 4^3, 4^5, 3^8, 8^3, 2^{10}, 10^2, 2^4, 4^2, 12^3 und 18^3!

3) Man stelle folgende Zahlen in Potenzform dar: 4, 8, 9, 25, 27, 32, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 125, 144, 169, 196, 216, 225, 256, 289, 324, 343, 361, 512, 729, 1000!

4) Man stelle folgende Ausdrücke in Potenzform dar und spreche sie aus: **a)** $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$; **b)** $-3 \cdot -3 \cdot -3 \cdot -3 \cdot -3$; **c)** $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$; **d)** $4 \cdot 4 \cdot -5 \cdot -5$; **e)** $(x + 5) \cdot (x + 5) \cdot (x + 5)$; **f)** $(3-m) \cdot (3-m) \cdot (3-m) \cdot (3-m)$; **g)** $xyz \cdot xyz \cdot xyz$; **h)** $x^5 \cdot x^5 \cdot x^5 \cdot x^5$; **i)** $x^3y^2 \cdot x^3y^2 \cdot x^3y^2$; **k)** $a^{x+1} \cdot a^{x+1} \cdot a^{x+1}$;

l) $\frac{3m}{n} \cdot \frac{3m}{n} \cdot \frac{3m}{n} \cdot \frac{3m}{n}$; **m)** $\frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{a+b}{a-b}$!

5) Man schreibe: **a)** die mte Potenz von n; **b)** die xte Potenz von 5; **c)** x hoch y; **d)** die (x + y)te Potenz von z!

6) Wie bezeichnet man das Produkt, das den Faktor 5 sechsmal enthält und welcher Zahl ist dasselbe gleich?

7) Wie bezeichnet man das aus m gleichen Faktoren n gebildete Produkt?

8) Ein Quadrat ist a m lang; wieviel qm enthält dasselbe? Wieviel cbm enthält ein Würfel von a m Höhe?

9) Man rechne die Resultate folgender Aufgaben aus und gebe sie in Potenzform an:

a) A gibt täglich 7 *M* aus, wieviel in 7 Wochen?

b) A verbraucht monatlich 12 Pfund, das Pfund kostet 12 *M*; wie groß ist die Ausgabe in 12 Jahren?

c) Wieviel erhält man aus einem hl Weizen in 6 Jahren, wenn ein hl durchschnittlich jährlich 10 hl gibt und wenn jedes Jahr das im vorhergehenden Jahr Erhaltene ausgesäet wird?

10) Man drücke durch allgemeine Zahlzeichen in Verbindung mit Ziffern und den bekannten Operationszeichen (wenn nötig unter Anwendung von Klammern) aus:

a) das Quadrat, den Kubus und das Biquadrat einer Summe, einer Differenz, eines Produkts, eines Quotienten und einer Potenz;

b) die Summe und die Differenz zweier Zahlen, dividiert durch das Quadrat, den Kubus einer dritten;

c) die Summe, die Differenz, das Produkt und den Quotienten zweier Quadrat-, zweier Kubik- und zweier Biquadratzahlen;

d) das Quadrat, den Kubus und das Biquadrat der Summe, der Differenz, des Produkts und des Quotienten zweier Quadratzahlen!

11) Man drücke in Worten aus:

$\frac{a^2 + b^2}{x^3}$; $\frac{a^2 + a}{b^2 + c^2}$; $\frac{a^3b^3}{c^4}$; $\frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$; $\frac{(a + x)^3}{a^3 + x^3}$; $\frac{(a - x)^3}{a^2 - x^2}$!

12) Man bestimme den Grad der nachfolgenden Potenzen; auch gebe man an, welche derselben gerade, welche ungerade Potenzen sind und wie die Koefficienten derselben heißen: $5a^8$; x^9; $-3m^7$; $9(xy)^{2n}$; $-5(xy)^{2n+1}$; $-(ab)^{2n-1}$; $7a^6$; $-a^7$; $(5a)^6$; $(\frac{7}{8}a)^5$!

13) Welche der nachfolgenden Potenzen sind gleich, welche gleichbasig und welche gleichnamig: x^5; $3x^5$; $-18x^5$; $-3m^6$; m^9; $4m^{11}$; $18a^8$; $-3b^8$; $4c^8$; $2(a + b)^5$; $-7(a + b)^3$; $2(xy)^3$; $(xy)^3$; $3x^7$; $(2a)^7$?

I. Das Potenzieren mit positiven ganzen Exponenten.

§ 12. Addition und Subtraktion*).

Mündlich.

1) $4a^3 + 7a^3 - 5a^3 + 12a^3 + 15a^3 - 13a^3$.

2) $5a^3b^5 + 8a^3b^5 - 6a^3b^5 + 12a^3b^5$.

*) Im ersten Abschnitt kamen in den vier Grundrechnungsarten der Buchstabenrechnung schon Potenzen vor, aber meist nur solche mit bestimmten Exponenten. In den Paragraphen 12—14 handelt es sich hauptsächlich um Wiederholung dieser 4 Species mit Potenzen, deren Exponenten allgemeine Größen sind (Lehrordnung S. 257). Man berücksichtige daher vorzugsweise solche Beispiele.

Schriftlich.

1) $4a^m b^n - 9a^m b^n - 6a^m b^n + 12a^m b^n$.

2) $5a^m b^n + 12a^m + 6a^m b^n - 10a^m$.

3) $5^4 + 6^3 + 7^2 - 8^3$.

4) $5^4 + 3 \cdot 7^3 + 18 \cdot 5^4 - 2 \cdot 7^3$.

5) $12^3 - 8^3 + 5^3 - 7^3$.

6) $6 \cdot 4^2 - 5 \cdot 4^3 + 7 \cdot 4^3 - 4^3$.

7) $(2 \cdot 3)^4 + (5 \cdot 3)^2 - (4 \cdot 2)^3 + (3 \cdot 8)^2 - 5^4$.

8) $3^4 \cdot 3^2 - 3^3 \cdot 4^2 + 2^4 \cdot 3^2 - 4 \cdot 6^3 + 7^3$.

9) $2(3^3 + 4) - 3(3 + 4^3) + 4(3 + 4)^3 - 5(3 + 4) + 6(3^3 + 4^3)$.

10) $\frac{3}{5} \cdot 5^3 + 3 \cdot 4^3 + \frac{(3 \cdot 3)^3}{81} - 4\left(\frac{6}{2}\right)^3$.

11) $\left(\frac{3}{5} \cdot 5\right)^3 + (3 \cdot 4)^3 + \left(\frac{3 \cdot 3}{81}\right)^3 - \left(4 \cdot \frac{6}{2}\right)^3$.

12) $ab^3c + b^2d^3c^2 - x^3y^5z + m^2x^4y^2$.

$a = 2 \quad c = 1 \quad x = 4 \quad z = 7$

$b = 3 \quad d = 5 \quad y = 6 \quad m = 8$.

13) $(3a^2b^3c + 5c^4d^5f - 6a^m b^n) + (-8a^2b^3c - 7c^4d^5f + 9a^m b^n) + (11a^2b^3c - 13c^4d^5f + 24a^m b^n) + (-20a^2b^3c + 30c^4d^5f - 25a^m b^n)$.

14) $(19a^m x^3 - 15 + 30ab^3x - 5b^m cx^2) - (5b^m cx^2 + 11a^m x^3 - 16 + 3ab^3x)$.

15) $(\frac{5}{6}a^m - \frac{1}{2}b^n + 7\frac{3}{4}c^q) + (\frac{2}{3}a^m + \frac{3}{4}b^n - 8\frac{1}{2}c^q) + (\frac{4}{5}a^m - \frac{2}{3}b^n + \frac{4}{5}c^q)$.

§ 13. Multiplikation.

a) Multiplikation gleichbasiger Potenzen.

Mündlich oder schriftlich.

1) $a^m \cdot a^n$. 2) $a^{m-n} \cdot a^n$. 3) $a^m \cdot a$.

4) $a^{n-1} \cdot a$. 5) $a \cdot a^{n-2} \cdot a$. 6) $a^m a^{5m} b^{4n} a^{6m} b^{9n}$.

7) $3a^m b^n c^q \cdot 5a^n b^q c^p$. 8) $5x^m y^n z^p \cdot 7x^n y^p z^q$.

9) $x^{m-n} x^n y^{4m-5n} y^{6n-3m}$.

10) $(a + b)^p \cdot (a + b)^q$. 11) $(x - y)^{n-1} \cdot (x - y)$.

12) $(m + n)^p cq^2 \cdot (m + n)^r c^2 q^3$. 13) $a^{6m+2n} \cdot a^{5m+n}$.

14) Wenn $12^2 = 144$ und $12^3 = 1728$ ist, wie groß ist 12^5?

15) $\frac{5m^x n^y}{3p^{3z}} \cdot 7m^{y-x} n^{2y}$. 16) $a^{3m-2n} \cdot \frac{a^{5m+2n}}{b^x}$.

17) $\frac{a^{6m-5n}b^{8x-7y}}{3(m-n)^5} \cdot \frac{a^{3n-4m}b^{9y-5x}}{2(m-n)}$.

18) $(a^m + a^{m-1} + a^{m-2} - a^{m-3})a^3$.

19) $\left(\frac{5a^{m+2}b^{3n-2}}{4c^{3p+2}d} - \frac{3a^3b^{2n+5}}{7c^2d^3}\right) \cdot - \frac{2a^m b^{3n-1}}{3c^8d^2}$.

20) $(a^x + a^y)(a^x - a^y)$.

21) $3a^{3-m}b^{r+2}c^{s-3} \cdot 4a^{m+2}b^{4+r}c^{6-s}$.

Schriftlich.

1) $a^{3n} - a^{m+2n} + a^{n+2m} - a^{3m})(a^n + a^m)$.

2) $(a^{4-3m} + a^{3m-6n} + a^{5m-8n} + a^{7m-10n})(a^{3m-6n} - a^{5m-8n})$.

3) $(3a^{4-3m}b^{r+5} + 2a^{m-3}b^{6+3r})(a^{m-1}b^{s-r} - ca^h)$.

4) $\frac{1}{x^8} + \frac{1}{x^7} + \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x}$.

5) $\frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n-1}}$. 6) $\frac{a^{n-1}}{(a+b)^{m-1}} - \frac{a^n}{(a+b)^m}$.

7) $\frac{a^n}{(a-b)^n} - \frac{a^{n-1}}{(a-b)^{n-1}}$.

8) $\frac{a}{b^x} + \frac{c}{b^{x-y}} + \frac{d}{b^{x-2y}}$.

9) $\frac{a}{x^n} + \frac{b}{x^{n-1}} - \frac{c}{x^{n-2}}$.

10) $\frac{x^m + y^m}{x^m - y^m} - \frac{x^m - y^m}{x^m + y^m}$.*)

b) Multiplikation gleichnamiger Potenzen.

Mündlich.

1) Man berechne auf zwei Arten: **a)** $3^2 \cdot 4^2$; **b)** $3^3 \cdot 2^3$; **c)** $4^3 \cdot 3^3$; **d)** $5^3 \cdot 3^3$; **e)** $3^4 \cdot 4^4$!

2) Wie berechnet man auf die kürzeste Weise: **a)** $5^6 \cdot 2^6$; **b)** $33^8 \cdot 3^8$; **c)** $2^5 \cdot 6^5 \cdot 6^5 \cdot 2^5$; **d)** $124^7 \cdot 3^7 \cdot 2^7$; **e)** $5^6 \cdot 2^6 \cdot 3^6 \cdot 7^6$; **f)** $21^5 \cdot 13^5 \cdot 2^5 \cdot 18^5$?

3) Wieviel ist: **a)** $(1\frac{7}{8})^4 \cdot (1\frac{3}{5})^4$; **b)** $(2\frac{2}{11})^3 \cdot (1\frac{5}{6})^3$?

4) $\left(\frac{a+b}{c-d}\right)^n \cdot \left(\frac{c+d}{a+b}\right)^n \cdot \left(\frac{c-d}{a-b}\right)^n$.

5) $(4a - 5b)^m \cdot (16a^2 + 25b^2)^m \cdot (4a + 5b)^m$.

---

*) Multiplikationen mit zusammengesetzten Größen, in denen Potenzen vorkommen, sind in den Paragraphen 3 und 8 enthalten.

§ 14. Division.

a) Division gleichbasiger Potenzen.

Mündlich.

1) Man berechne auf zweierlei Weise: a) $8^3 : 8^2$; b) $9^4 : 9^2$; c) $4^6 : 4^3$; d) $5^6 : 5^4$!

2) Man berechne auf die kürzeste Weise: a) $12^7 : 12^4$; b) $9^5 : 9^2$; c) $15^6 : 15^3$!

3) $6(a + b)^4 : 3(a + b)^2$.
4) $24a^4b^9c^7d^{10} : 6ab^6c^6d^9$.

5) $18(a^4 - b^3)^8 : 6(a^4 - b^3)^5$.
6) $72(m^3+n^2)^{11} : 18(m^3 + n^2)^7$.

7) $a^m : a^n$.
8) $a^m : a$.
9) $a^{5m} : a^m$.

10) $(a + b)^m : (a + b)^n$.
11) $(x + y)^{m-n} : (x + y)^2$.

12) $40a^{8m}b^{2n} : 8a^{3m}b^n$.
13) $75a^{13x}b^{11y} : 15a^{2x}b^{3y}$.

14) $\frac{4a^2b^6}{5} : 2a^2b^3$.
15) $3a^2b^3c : \frac{6a^4b^5x}{5x^3}$.

16) $4x^3y^5z : \frac{4x^2y^3}{3z^6}$.
17) $\frac{3x^4y^5}{7} : \frac{15x^3y^4}{14}$.

18) $\frac{3a^4f}{4b^6} : \frac{9cm^2}{8a^5b^3}$
19) $\frac{4x^{9m}y^{8n}}{5z^{10p}} : \frac{7x^{5m}z^{6p}}{y^{10y}}$.

20) $\frac{2a^4(1 + c^3)^3}{f^2g^3} : \frac{5a^5x(1 + c^3)^7}{2f^3g^5}$.*)

b) Division gleichnamiger Potenzen.

Mündlich.

1) Man berechne auf doppelte Weise: a) $8^3 : 4^3$; b) $12^3 : 4^3$; c) $10^3 : 5^3$.

2) Wie berechnet man auf die kürzeste Weise: a) $16^3 : 8^3$; b) $51^3 : 17^3$; c) $8^5 \cdot 18^5 : 72^5$; d) $1{,}8858^3 : 3{,}143^3$; e) $48^3 : (2\frac{2}{5})^3$; f) $(51\frac{1}{3})^3 : (4\frac{2}{3})^3$?

3) $(25x^2 - 16y^2)^m : (5x - 4y)^m$.

4) $(64x^2 - 81y^2)^m : (8x - 9y)^m$.

§ 15. Das Potenzieren der verschiedenen Zahlformen.

a) Das Potenzieren der Zahl Eins, Null und der negativen Zahlen.

Mündlich.

1) 1^2.
2) 1^5.
3) 1^{100}.

4) 1^a.
5) 1^{x+y}.
6) $1 \cdot 1^b$.

*) Divisionen mit zusammengesetzten Größen, in denen Potenzen vorkommen, sind in den Paragraphen 4 und 9 enthalten.

7) 0^2. 8) 0^7. 9) 0^{x+y}.
10) $(-6)^2$. 11) $(-6)^3$. 12) $(-5)^4$.
13) $(-a)^7$. 14) $(-m)^4$. 15) $(-x)^{12}$.
16) $(-a)^{2n}$. 17) $(-a)^{2n+1}$. 18) $(-a)^{2n-1}$.
19) $(-1)^4$. 20) $(-1)^5$. 21) $(-1)^{12}$.
22) $(-1)^{2n}$. 23) $(-1)^{2n+1}$. 24) $(-1)^{2n-1}$.
25) $(-1)^5 \cdot (-2)^5 - (-3)^6 \cdot (-4)^5$.
26) $(-1)^4 \cdot (-2)^3 + (-3)^5 \cdot (-4)^2 - (5)^2 \cdot (-6)^2$.

b) Das Potenzieren von Produkten.

Mündlich.

1) $(3 \cdot 8)^2$. 2) $(5 \cdot 3)^3$. 3) $(abc)^3$.
4) $(3abc)^3$. 5) $(9xy)^2$. 6) $(abcd)^4$.
7) $(6bcx)^3$. 8) $(-5a)^2$. 9) $(-7ab)^2$.
10) $(-7ab)^3$. 11) $(-3ab)^5$. 12) $(-5xy)^3$.

c) Das Potenzieren von Quotienten.

Mündlich.

1) Man berechne auf doppelte Weise: a) $(\frac{9}{3})^3$; b) $(\frac{12}{4})^3$; c) $(\frac{15}{3})^3$; d) $(\frac{16}{4})^3$!

2) $\left(\frac{a}{b}\right)^2$. 3) $\left(\frac{3ab}{2cd}\right)^3$. 4) $\left(\frac{5a}{6cx}\right)^3$.
5) $\left(\frac{2+b}{3-c}\right)^2$. 6) $\left(-\frac{3a}{4b}\right)^2$. 7) $\left(-\frac{3b}{4a}\right)^3$.

Schriftlich.

1) $(\frac{4}{5})^4 \cdot (\frac{5}{6})^2$. 2) $(\frac{2}{3})^4 \cdot (\frac{5}{4})^3 \cdot (\frac{6}{7})^2$.
3) $\left(\frac{3ab}{5cd}\right)^2 \cdot \left(\frac{2ax}{7cy}\right)^3$. 4) $\left(\frac{2ab}{3cd}\right)^2 \cdot \left(\frac{3cd}{4ab}\right)^3 \cdot \left(\frac{5ef}{6gh}\right)^2$.

d) Das Potenzieren von Potenzen.

Mündlich.

1) Man berechne auf mehrfache Weise: a) $(2^3)^2$; b) $(3^3)^2$; c) $(2^4)^2$; d) $(4^2)^3$!
2) $(4^3)^3$. 3) $(5^2)^3$. 4) $(6^5)^3$. 5) $(7^3)^3$.
6) $(a^4)^5$. 7) $(-a^2)^2$. 8) $(-a^2)^5$. 9) $(-a^5)^7$.
10) $(7a^n)^3$. 11) $(3a^3b^4c^5)^3$. 12) $(4m^3n^5p^8)^4$.
13) $(-3a^2b^4)^3$. 14) $(-5a^2c^3)^4$. 15) $((-3a^4)^2)^3$.
16) $\left(\frac{2a^3b^4c}{3d^2f^5}\right)^2$. 17) $\left(-\frac{3a^2b^4}{c^7}\right)^3$. 18) $\left[-\left(-\frac{2a^5b^3}{d^5}\right)^3\right]^4$.
19) Wovon ist b^{20}, c^{30} das Quadrat? Wovon c^{36}, x^{63} der Kubus?

Schriftlich.

1) Wie groß ist 4^{16}, wenn $4^4 = 256$ ist?
2) Man soll $(ab)^{2x+3y}$ zur Potenz $4x - 5y$ erheben!
3) Es soll $a^{rr} \cdot a^{ss}$ durch $(a^{r+s})^{r-s}$ dividiert werden!
4) Man soll 2^{37} aus $2^5 = 32$ und $2^7 = 128$ berechnen!
5) Es soll $a^{bb} \cdot a^{bc} \cdot a^{cc}$ zur Potenz $b - c$ erhoben werden!
6) $(-2a)^8 + (3a^2)^4 - (-4a^4)^2 - (-5a^4)^2 + (2(-a)^2)^4$.
7) $(-3a^3)^4 - (-5a^4)^3 - (-2a^2)^6 - (-4a^6)^2 - (2(-a)^3)^4$.
8) $(-3a^4)^5 - (-2a^5)^4 + ((-2a^2)^2)^5 - (3(-a^5)^2)^2 - (-(-4a^2)^2)^5 + 6760((-a^5)^2)^2 + ((-3a^2)^5)^2$.
9) $\left[\left(\frac{a^3b^2}{d^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{y^3}{b}\right)^3\right] : \left[\left(\frac{a^3}{d^2y}\right)^4 \cdot \left(\frac{by^2}{a^2d}\right)^5\right]$.

e) Das Potenzieren algebraischer Summen.

α) Das Quadrieren algebraischer Summen.

Mündlich.

1) $(a + b)^2$. 2) $(a - b)^2$. 3) $(3a - 4b)^2$.
4) $(5x^3 - 4y^4)^2$. 5) $(6m^2 + 7n^5)^2$. 6) $(3b^r - 8b^s)^2$.
7) $\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right)^2$. 8) $\left(\frac{3a}{b} + \frac{5b}{a}\right)^2$.
9) $\left(\frac{3ab}{4cd} - \frac{5cd}{8a}\right)^2$. 10) $\left(\frac{5ax}{4y^2} - 3y^4\right)^2$.
11) $(a + b + c)^2$. 12) $(x + y + z)^2$.
13) $(x - y - z)^2$. 14) $(2a + 3b + 4c)^2$.
15) 43^2. 16) 57^2. 17) 112^2. 18) 235^2.

Schriftlich.

1) $(4x^2 + 5y + 6z^3)^2$. 2) $(4a^2 + 3b^3 - 2c^4 + 7d^2)^2$.
3) $(7 + 5y - 3y^2 - 2y^3 + 4y^4)^2$.
4) $\left(\frac{2a}{3} - \frac{4b}{5} + \frac{c}{2}\right)^2$. 5) $\left(\frac{2a^2}{3b^2} + \frac{4b^3}{5c^2} - \frac{3}{a^2}\right)^2$.

β) Das Kubieren algebraischer Summen.

Mündlich.

1) $(a + x)^3$. 2) $(a - x)^3$. 3) $(a^2 + b^2)^3$.
4) $(a^2 - b^3)^3$. 5) $(5a + 4b)^3$. 6) $(5a - 3b)^3$.
7) $(3ab + 4cd)^3$. 8) $(5x^2 + 6y^2)^3$. 9) $(ab^m + 6a^n)^3$.

Schriftlich.

1) $\left(\frac{3a}{4b} - \frac{5b}{3c}\right)^3$. 2) $\left(\frac{5ab^2}{3c^4} + \frac{7c^2}{b^3}\right)^3$.

3) $\left(\frac{5ay^3}{9c} - \frac{3a^2y}{4}\right)^3$. 4) $\left(\frac{2a}{3b} + \frac{c}{d}\right)^3$.

5) $(3a - 4b + 5c)^3$. 6) $(3x^2 - 5y^3 + 4z^3)^3$.

II. Das Potenzieren mit negativen Exponenten.

§ 16. Beseitigung negativer Exponenten und Berechnung gegebener Zahlenausdrücke.

Mündlich.

1) a^{-n}. 2) m^{-5}. 3) $(ab)^{-3}$.

4) $\frac{1}{a^{-n}}$. 5) $\frac{a^{-3}}{b^{-5}}$. 6) $\left(\frac{a}{7}\right)^{-3}$.

7) $\frac{5a^{-3}b^{-5}}{3c^{-6}d^{-2}}$. 8) $\frac{7a^{-3}(b+3)^{-5}}{2(a+b)^{-6}}$. 9) $\frac{3(a+b)^{-6}c^{-2}}{2(m+n)^{-2}d^{-2}}$.

10) $3a^{-2} + 4a^{-5} - 6a^{-9} + 40a^0 - 50a^{-11}$.

11) 1^{-n}. 12) $(-1)^{-2}$. 13) $(-a)^{-5}$.

14) 2^{-3}. 15) 5^{-3}. 16) $3^2 \cdot 6^{-3}$.

17) $\frac{3^{-4}}{6^{-2}}$. 18) $\frac{16}{3^{-3}}$. 19) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$.

20) $0{,}6^{-3}$. 21) $(3\frac{3}{4})^{-3}$. 22) $0{,}375^{-3}$.

§ 17. Multiplikation.

Mündlich.

1) $a^x \cdot a^{-y}$. 2) $a^{-x}a^y$. 3) $a^{-x}a^{-y}$.

4) $a^{-3} \cdot a^{-4}$. 5) $a^{-4} \cdot a^{-6} \cdot a^{-9}$. 6) $3^{-3} \cdot 4^5$.

7) $5a^3b^4c^5 \cdot -6a^2b^8c^{-4}$. 8) $4 \cdot 5^{-8} \times 2 \cdot 5^{-3} \times 2 \cdot 5^9$.

9) $a^{-4}b^5c^{-6}d^{-4} \cdot -2a^{-5}b^{-8}c^9d$. 10) $(m+n)^pcq^2 \cdot (m+n)^rc^2q^{-3}$.

11) $(-a^{p+r+s}) \cdot (-4a^{4p-r-s})$. 12) $(-9a^{-1}c^{-2}) \cdot (-5a^{-6}b^{-8}c^3)$.

Schriftlich.

1) $\frac{15c^{-4}d^4}{4f^{-3}g^{-6}} \cdot \frac{12c^7d^{-6}}{25f^4g^9}$. 2) $\frac{5a^4b^{-6}c^{-3}}{11d^5f^{-3}g^{-6}} \cdot \frac{22a^{-6}b^9c^5}{25d^{-8}fg}$.

3) $\frac{1}{4a^{-m}b^{-n}} \cdot \frac{1}{5a^{-r}b^{-s}}$. 4) $\frac{2a}{3b^{-n}c^{-p}} \cdot \frac{5c}{2ab^mc^q}$.

5) $\frac{3a^{-4}b^2c^4}{(a+b)^{-n}(c^2-d^2)} \cdot \frac{5a^6b^{-7}c^{-5}}{(a+b)^m(c^2-d^2)^4}$.

6) $(a+b)^{-4}x^3y^4 \cdot (a+b)^7x^{-5}y^{-5}$.

7) $(3a^{-7}b^6 + 2a^5b^{-4} - 8b^9c^{-3})5a^3b^{-8}c^2$.

8) $(4x^{-6}y^2 - 5x^{-5}y^4 + 7x^{-4}y^6)(7x^{-2}y^2 - 3x^{-1}y^4)$.

9) $(a + x)^{-5}x^3y^{-5}z^{-6} \cdot (a + x)^9x^{-1}y^6z^9$.

10) $\dfrac{3b^{-5}c^2d^3e^4}{(x+y)^{-z}(a+b)^m} \cdot \dfrac{5b^3c^{-6}d^{-5}e^{-3}}{(x+y)^{z-3}(a+b)^{-m+5}}$.

§ 18. Division.

Mündlich.

1) $a^x : a^{-y}$. 2) $a^{-x} : a^y$. 3) $a^{-x} : a^{-y}$.

4) $a^7 : a^{-4}$. 5) $a^{-7} : a^4$. 6) $a^{-7} : a^{-4}$.

7) $6^{-3} : 3^{-4}$. 8) $12a^{-8} : 6a^5$. 9) $13a^{-7} : -5a^{-8}$.

10) $ca^{12} : fa^{-5}$. 11) $a^2b^3 : cb^{-5}$. 12) $\frac{2}{3}a^{-2}b : \frac{1}{2}a^{-8}b^{-3}$.

13) $18(a^4 - b^3)^{-8} : 6(a^4 - b^3)^5$. 14) $12(a+b)^{-10} : 4(a + b)^{-6}$.

15) $(a + b)^3(a + c)^{-5} : (a + b)^{-5}(a + c)^{-12}$.

Schriftlich.

1) $-\dfrac{5c^3a^{-n}d^m}{7} : 2c^3a^pd^{-2}$.

2) $\dfrac{2a^4(1 + c^3)^3}{f^2g^3} : \dfrac{5a^5x(1 + c^3)^{-7}}{2f^3g^5}$.

3) $(3a^8b^{-7} + 5a^{-6}b^3 + 12a^2b^{-5}c^{-6}) : 2d^2b^{-1}c^{-2}$.

4) $28x^{-8}y^4 - 47x^{-7}y^6 + 64x^{-6}y^8 - 21x^{-5}y^{10} : (7y^{-2}y^2 - 3x^{-1}y^4)$.

§ 19. Das Potenzieren der verschiedenen Zahlformen.

Mündlich.

1) $(4 \cdot 3)^{-3}$. 2) $(3 \cdot 2)^{-3}$. 3) $(abc)^{-5}$.

4) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3}$. 5) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-3}$. 6) $\left(\dfrac{ab}{cd}\right)^{-2}$.

7) $(2^{-2})^{-4}$. 8) $(a^{-5})^{-6}$. 9) $(-a^3)^{-4}$.

10) $\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}\right]^2$. 11) $\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\right]^{-2}$. 12) $\left(\dfrac{a^3b^{-5}}{c^{-4}d^{-6}}\right)^{-4}$.

13) $((-m)^{-3})^5$. 14) $((-2c)^{-1})^{-6}$.

Schriftlich.

1) $(\frac{3}{4})^{-2} \cdot (\frac{2}{3})^{-3} \cdot (\frac{4}{5})^{-2} \cdot (\frac{1}{2})^{-5} \cdot (\frac{2}{5})^{-4}$.

2) $\dfrac{3(a^{-1}b^2c^3)^{-4}}{2(a^2b^{-1}c^4)^3}$. 3) $\dfrac{(4a^{-1}b^2c^{-4})^3}{(5^{-1}a^2b^{-3}c^3)^{-2}}$.

4) $\left(\dfrac{3ab}{4cd}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{5cd}{6ab}\right)^{-3} \cdot \left(\dfrac{2ab}{7cd}\right)^{-4} \cdot \left(\dfrac{3cd}{8ab}\right)^{-5}$.

5) $(2x^3)^2 - (-5x^2)^3 - \left(-\dfrac{x}{2^{-1}}\right)^6 - \left(-\dfrac{3x^{-1}}{x^{-3}}\right)^3$.

6) $\left(\dfrac{3ab}{4cd}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{3cd}{2ab}\right)^{-3} \cdot \left(\dfrac{5ab}{4cd}\right)^{-4} \cdot \left(\dfrac{cd}{ab}\right)^{-5}$.

Dritter Abschnitt.

Wurzeln.

§ 20. Die Wurzeln im allgemeinen.

Mündlich.

1) Man drücke in Zeichen aus, daß die zweite Wurzel aus folgenden Zahlen gezogen werden soll und gebe dieselbe an: 9, 4, 36, 16, 25, 100, 144, 400, 324, 256, 169, 289, 196, 121, 81, 225!

2) Man drücke in Zeichen aus, daß die dritte Wurzel aus folgenden Zahlen gezogen werden soll und gebe dieselbe an: 8, 64, 27, 125, 216, 1000, 512, 343, 729!

3) In Zeichen auszudrücken und zu berechnen: die Quadratwurzel aus 9 + 16; aus 25 — 9; die Quadratwurzel aus 9 nebst der Quadratwurzel aus 16; die Quadratwurzel aus 25 weniger der Quadratwurzel aus 9.

4) Wenn m in x gleiche Faktoren zerlegt werden soll, wie groß ist jeder Faktor? Wie groß, wenn n in y, m in n gleiche Faktoren zerlegt wird?

5) Welche Zahl gibt, zur zweiten, welche zur dritten, welche zur sechsten Potenz erhoben, 729? Welche Zahl gibt, zur nten Potenz erhoben, m?

6) $\sqrt{m} \cdot \sqrt{m} = ?\ \sqrt{y} \cdot \sqrt{y} = ?\ \sqrt[3]{m} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot \sqrt[3]{m} = ?$

7) Womit muß man $\sqrt{6}$ multiplicieren, damit 6 herauskommt; womit $\sqrt{x}$, damit x resultiert?

8) Man drücke durch allgemeine Zahlzeichen in Verbindung mit Ziffern und den Operationszeichen (wenn nötig unter Anwendung von Klammern) aus:

a) Die Quadrat-, Kubik- und Biquadratwurzel aus einer Summe, einer Differenz, einem Produkt, einem Quotienten und einer Potenz.

b) Die Summe, die Differenz, das Produkt und den Quotienten zweier Quadrat-, zweier Kubik- und zweier Biquadratwurzeln.

c) Das Quadrat, den Kubus und das Biquadrat einer Quadrat-, einer Kubik- und einer Biquadratwurzel aus einer Zahl.

d) Die Summe einer Zahl und der Quadratwurzel aus derselben.

9) Man übersetze in die Wortsprache:

$a\sqrt{a+b}$; $(a-z)\sqrt{a-z}$; $\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; $\frac{a+b}{\sqrt{a+b}}$; $\frac{ab}{\sqrt{a-b}}$; $\frac{(a+b)^2}{\sqrt{a-b}}$; $\frac{\sqrt{a+b}}{c}$.

§ 21. Ausziehung der Quadratwurzel aus bestimmten Zahlen.

a) Ausziehung rationaler Quadratwurzeln.

α) Die Radikanden sind ganze Zahlen.

Mündlich.

1) 121. **2)** 169. **3)** 225. **4)** 324.
5) 625. **6)** 841. **7)** 961. **8)** 729.
9) 1849. **10)** 1369. **11)** 2916. **12)** 3969.
13) 6084. **14)** 7921. **15)** 8649. **16)** 9801.

Schriftlich.

1) 12544. **2)** 15129. **3)** 18225. **4)** 10201.
5) 40804. **6)** 90601. **7)** 273529. **8)** 697225.
9) 366025. **10)** 651249. **11)** 819025.
12) 1522756. **13)** 5688225. **14)** 1002001.
15) 41075281. **16)** 49126081. **17)** 82537225.
18) 152300281. **19)** 780811249. **20)** 9876781924.
21) 285970396644. **22)** 10068516964.

β) Die Radikanden sind Dezimalbrüche.

Mündlich.

1) 0,04. **2)** 0,09. **3)** 0,16. **4)** 0,49.
5) 0,81. **6)** 1,44. **7)** 1,96. **8)** 3,24.
9) 0,0004. **10)** 0,0025. **11)** 0,0064. **12)** 0,0081.
13) 0,0121. **14)** 0,0169. **15)** 0,0256. **16)** 0,0361.

17) 0,0625. 18) 0,1296. 19) 0,2401. 20) 0,6889.
21) 0,000004. 22) 0,000036. 23) 0,000049. 24) 0,000081.
25) 0,000144. 26) 0,000289. 27) 0,001444. 28) 0,010201.

Schriftlich.

1) 0,801025. 2) 0,714025. 3) 0,970225.
4) 11,9025. 5) 2388,765625. 6) 90603,52841764.

γ) **Die Radikanden sind gemeine Brüche.**

Mündlich.

1) $\frac{4}{9}$. 2) $\frac{16}{25}$. 3) $\frac{9}{25}$. 4) $\frac{49}{81}$. 5) $\frac{121}{144}$.
6) $\frac{169}{196}$. 7) $\frac{256}{361}$. 8) $\frac{289}{324}$. 9) $\frac{441}{529}$. 10) $\frac{625}{961}$.
11) $1\frac{9}{16}$. 12) $5\frac{4}{9}$. 13) $20\frac{1}{4}$. 14) $3\frac{13}{36}$. 15) $3\frac{33}{64}$.

b) Ausziehung irrationaler Quadratwurzeln.

α) **Die Radikanden sind ganze Zahlen.**

Schriftlich.

1) 2. 2) 3. 3) 6. 4) 11.
5) 21. 6) 95. 7) 263. 8) 500.
9) 843. 10) 1001. 11) 64302. 12) 4678544.

β) **Die Radikanden sind Dezimalbrüche.**

Schriftlich.

1) 0,4. 2) 0,9. 3) 0,12. 4) 0,015.
5) 4,9. 6) 36,25. 7) 1,007. 8) 0,4545.
9) 0,6363.

γ) **Die Radikanden sind gemeine Brüche.**

Schriftlich.

1) $\frac{5}{4}$. 2) $\frac{7}{8}$. 3) $\frac{13}{9}$. 4) $\frac{7}{16}$.
5) $12\frac{1}{2}$. 6) $7\frac{3}{4}$. 7) $45\frac{5}{8}$. 8) $100\frac{7}{16}$.

c) Berechnung von Ausdrücken, in denen Quadratwurzeln vorkommen.

Mündlich.

1) $\sqrt{4^2 + 3^2}$. 2) $\sqrt{4^2} + \sqrt{3^2}$ *). 3) $\sqrt{13^2 - 5^2}$.
4) $\sqrt{13^2} - \sqrt{5^2}$. 5) $\sqrt{81} + \sqrt{64} - \sqrt{144}$.
6) $\sqrt{\sqrt{16}}$. 7) $\sqrt{\sqrt{625}}$. 8) $\sqrt{\sqrt{81}}$.

---

*) Weitere Aufgaben solcher Art: $\sqrt{12^2 + 9^2}$ und $\sqrt{12^2} + \sqrt{9^2}$; $\sqrt{8^2 + 15^2}$ und $\sqrt{8^2} + \sqrt{15^2}$; $\sqrt{24^2 + 7^2}$ und $\sqrt{24^2} + \sqrt{7^2}$ u. s. f.

9) $\sqrt{4\sqrt{16}}$. 10) $\sqrt{27\sqrt{9}}$. 11) $3{,}5\sqrt{196}$.
12) $6{,}8\sqrt{324}$. 13) $\sqrt{100^2 - 80^2}$. 14) $\sqrt{3^2+(\frac{3}{2}\sqrt{3})^2}$.
15) $18{,}75\sqrt{13^2 - 5^2}$. 16) $0{,}23\sqrt{0{,}0064}$.

Schriftlich.

1) $\sqrt{261{,}72^2 + 196{,}29^2}$. 2) $\sqrt{112^2 - 80^2}$.
3) $3 \cdot 54\sqrt{2}$ 4) $\sqrt{54 \cdot \sqrt{2}}$.
5) $\frac{1}{2}\sqrt{54^3\sqrt{2}}$. 6) $\frac{1}{3} \cdot 4{,}2\sqrt{6}$.
7) $\frac{1}{12} \cdot 4{,}2^3\sqrt{2}$. 8) $4{,}2^2\sqrt{3}$.
9) $2\left(\frac{45{,}34}{5{,}4} + \sqrt{3 \cdot 45{,}34 \cdot 5{,}4\sqrt{3}}\right)$.
10) $\frac{1}{12}(6{,}2^2 + 4^2 + 6{,}2 \cdot 4) \cdot \sqrt{3 \cdot (8{,}4)^2 - (6{,}2 - 4)^2}$.
11) $\frac{1}{4}(6{,}2^2 + 4^2)\sqrt{3} + \frac{3}{4}(6{,}2 + 4) \cdot \sqrt{4 \cdot (8{,}4)^2 - (6{,}2 - 4)^2}$.

d) Anwendung der Quadratwurzelausziehung.

Mündlich.

1) Welche Zahl gibt, mit sich selbst multipliciert, 324?

2) Eine gewisse Anzahl Personen hatte zusammen 6,25 *M* zu zahlen und zwar mußte jede Person so viele Pfennig geben, als es Personen waren. Wieviel hat jede zu zahlen?

3) Multipliciert man die Hälfte und das Drittel einer gewissen Zahl miteinander, so erhält man als Produkt 1176. Welches ist diese Zahl?

4) Multipliciert man $\frac{1}{3}$ einer Zahl mit $\frac{1}{4}$ derselben, so erhält man als Produkt 432. Wie heißt diese Zahl?

5) Multipliciert man das $2\frac{1}{2}$fache einer Zahl mit dem $\frac{2}{3}$fachen derselben, so erhält man 960. Welches ist diese Zahl?

6) Wenn man den dritten (2ten) und vierten (3ten) Teil einer gewissen Zahl mit einander multipliciert und das Produkt durch 6 (4) dividiert, so erhält man 32 ($73\frac{1}{2}$). Wie heißt diese Zahl?

7) Zwei Zahlen, von denen die eine viermal (fünfmal) so groß als die andere ist, geben miteinander multipliciert ein Produkt, dessen 9. Teil (3. Teil) 256 (375) beträgt. Welches sind die beiden Zahlen?

8) Subtrahiert man von einer gewissen Zahl 5, multipliciert den Rest mit sich selbst und addiert zum Produkte 5, so erhält man 149. Welches ist diese Zahl?

9) Multipliciert man zwei Zahlen miteinander, so erhält man 612, dividiert man aber die erste durch die zweite, so ergibt sich als Quotient $4\frac{1}{4}$. Wie heißen beide Zahlen?

10) Wenn man von einer gewissen Zahl 6 subtrahiert, zu derselben Zahl auch 6 addiert und nun jene Differenz mit dieser Summe multipliciert, so erhält man 325. Welche Zahl ist dies?

11) Subtrahiert man vom 15fachen Quadrat einer gewissen Zahl 16, so erhält man ebenso viel, als wenn man zum 11fachen Quadrat derselben Zahl 84 addiert. Wie heißt diese Zahl?

12) Multipliciert man den 3. und 5. Teil einer Zahl miteinander und das so erhaltene Produkt mit 6, so erhält man 810; welches ist diese Zahl?

13) Multipliciert man eine gewisse Zahl mit sich selbst, subtrahiert von dem erhaltenen Quadrat 1 und dividiert die entstandene Differenz durch 24, so erhält man 15. Welches ist diese Zahl*)?

14) Multipliciert man die Hälfte und den dritten Teil einer Zahl miteinander, dividiert das erhaltene Produkt durch 8 und multipliciert den entstandenen Quotienten mit 15, so erhält man 180. Welches ist diese Zahl?

Schriftlich.

1) Ein quadratförmiger Platz ist mit 2809 gleichen quadratischen Platten belegt; wieviel Platten befinden sich an jeder Seite?

2) Ein rechtwinkeliger Acker, der ebensolang als breit ist, enthält 172 ha 19 a und 44 qm. Wie lang und breit ist derselbe?

3) In einem rechtwinkeligen Dreieck beträgt die eine Kathete 140 m, die andere 105 m. Wie groß ist die Hypotenuse desselben?

4) Die Seite eines Quadrats beträgt 75 m; wie groß ist die Diagonale desselben?

5) Die Länge eines rechtwinkeligen Feldes beträgt 512 m 2 dm und die Breite desselben 402 m 4 dm. Wie groß ist die Entfernung von der einen bis zur andern gegenüberstehenden Ecke?

6) Eine 8 m lange Leiter wird an ein Fenster gestellt, das 7,5 m vom Boden entfernt ist; wie groß ist die Entfernung der Leiter von der senkrechten Wand?

---

*) Dieser Aufgabe liegt die merkwürdige Eigenschaft der Primzahlen zu Grunde, daß ihr um 1 vermindertes Quadrat stets eine durch 24 teilbare Zahl ist, falls dieses Quadrat die Zahl selbst übersteigt, z. B. $5^2 - 1 = 24$. $13^2 - 1 = 168$ u. s. w. Wie läßt sich diese Erscheinung erklären, bezw. beweisen?

7) Man suche die Mittelglieder folgender Proportion 3453 : x = x : 31077!

8) Zwei senkrecht stehende Stäbe sind 5 m voneinander entfernt; der eine ist 9 m, der andere 4 m hoch. Wie groß ist die Entfernung der einen Spitze von der andern?

9) Die Diagonale eines Quadrats beträgt 5,5 m; wie groß ist die Seite desselben?

10) Die Sehne eines Kreises, welche 100,8 m lang ist, steht vom Mittelpunkt desselben 37,8 m ab. Wie groß ist der Radius dieses Kreises?

11) Auf einen Punkt wirken zwei Kräfte von 128 kg und 96 kg; wie groß ist die Resultierende, wenn beide einen rechten Winkel einschließen?

§ 22. Ausziehung der Kubikwurzel aus bestimmten Zahlen.

a) Ausziehung rationaler Kubikwurzeln.

α) Die Radikanden sind ganze Zahlen.

Mündlich.

1) 8.	2) 64.	3) 216.	4) 125.	5) 512.
6) 729.	7) 343.	8) 27.	9) 8000.	10) 64000.
11) 343000.	12) 729000.	13) 216000.	14) 512000.	15) 27000.
16) 64000000.		17) 512000000.		18) 343000000.

Schriftlich.

1) 1728.	2) 3375.	3) 12167.
4) 117649.	5) 205379.	6) 274625.
7) 658503.	8) 941192.	9) 970299.
10) 1404928.	11) 1685159.	12) 9663597.
13) 17173512.	14) 161878625.	15) 679151439.
16) 961504803.	17) 1030301.	18) 741217625.
19) 517781627.	20) 491169069.	21) 1879080904.
22) 6372783864.	23) 45384685263.	24) 327795367375.
25) 262881971416.	26) 729729243027.	27) 520300455507.
28) 27189441343.	29) 1885483737864.	30) 18780793880941.

β) Die Radikanden sind Dezimalbrüche.

Mündlich.

1) 0,008. 2) 0,125. 3) 0,729.
4) 0,512. 5) 0,027. 6) 0,000008.
7) 0,000064. 8) 0,000343. 9) 0,000729.
10) 0,000000027. 11) 0,000000216. 12) 0,000000512.

Schriftlich.

1) 0,032768. 2) 0,804357. 3) 9,261.
4) 175,616. 5) 0,016777216. 6) 41,063625.
7) 32,921840125.

γ) Die Radikanden sind gemeine Brüche.

Mündlich.

1) $\frac{1}{8}$. 2) $\frac{8}{27}$. 3) $\frac{27}{64}$. 4) $\frac{343}{729}$.
5) $\frac{64}{125}$. 6) $\frac{343}{512}$. 7) $\frac{125}{729}$. 8) $\frac{216}{343}$.
9) $3\frac{3}{8}$. 10) $2\frac{10}{27}$. 11) $1\frac{61}{64}$. 12) $2\frac{93}{125}$.

Schriftlich.

1) $\frac{1728}{12167}$. 2) $\frac{389017}{912673}$. 3) $\frac{74088}{493039}$.

b) Ausziehung irrationaler Kubikwurzeln.

α) Die Radikanden sind ganze Zahlen.

Schriftlich.

1) 3. 2) 5. 3) 11. 4) 19.
5) 22. 6) 39. 7) 14. 8) 151.
9) 201. 10) 304. 11) 2153. 12) 70000. 13) 6.

β) Die Radikanden sind Dezimalbrüche.

Schriftlich.

1) 3,2 2) 0,27. 3) 0,64. 4) 0,0216.
5) 11,34678905. 6) 44,20675421. 7) 123,0065421.
8) 0,4652637254. 9) 0,001736654408.

γ) Die Radikanden sind gemeine Brüche.

Schriftlich.

1) $\frac{7}{8}$. 2) $\frac{3}{4}$. 3) $4\frac{3}{8}$. 4) $10\frac{5}{8}$.

c) Berechnung von Ausdrücken, in denen Kubikwurzeln vorkommen.

Mündlich.

1) $\sqrt[3]{2^3 + 3^3}$. 2) $\sqrt[3]{2^3} + \sqrt[3]{3^3}$ 3) $\sqrt[3]{4^3 - 3^3}$.

4) $\sqrt[3]{4^3} - \sqrt[3]{3^3}$. 5) $24{,}3\sqrt[3]{512}$. 6) $32{,}75\sqrt[3]{343}$.

7) $\sqrt[3]{27 + 27 + 8 + 2}$. 8) $\sqrt[3]{64 + 64 - 3}$.

9) $\sqrt[3]{729 - 343 + 125 + 1}$.

Schriftlich.

1) $\sqrt[3]{15^3 - 13^3 - 627}$. 2) $\sqrt[3]{2^3 + 2{,}5^3 + 5^3}$.

3) $\sqrt[3]{\frac{2{,}4^3 \cdot 11{,}4 + 2{,}1^3 \cdot 7{,}8}{7{,}5}}$.

4) $20\left[1 - \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 7{,}2 - 1}{2 \cdot 7{,}2}}\right]$.

5) $\sqrt[3]{5 \cdot \sqrt{28{,}9444}}$. 6) $\sqrt[3]{163 \cdot \sqrt{40671}}$.

7) $\sqrt[3]{5{,}6\sqrt[3]{\frac{3}{5}}}$. 8) $\sqrt[3]{7\sqrt[3]{0{,}8}}$.

d) Anwendung der Kubikwurzelausziehung.

Mündlich.

1) Von welcher Zahl gibt der dritte Teil, multipliciert mit ihrem Quadrat, 243?

2) Multipliciert man eine gewisse Zahl mit der Hälfte derselben, das so erhaltene Produkt wieder mit der Hälfte der gedachten Zahl und addiert zu diesem letzteren Produkt 637, so erhält man 765. Welches ist diese Zahl?

3) Multipliciert man die Hälfte, den dritten Teil und den vierten Teil einer gewissen Zahl miteinander, so erhält man 72. Wie heißt diese Zahl?

4) Wenn man das $1\frac{1}{2}$fache einer gewissen Zahl mit dem $\frac{2}{3}$fachen derselben und das Produkt noch mit $\frac{5}{6}$ derselben multipliciert, so erhält man 180. Wie heißt diese Zahl?

5) Multipliciert man $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{9}$ einer gewissen Zahl miteinander und dividiert das erhaltene Produkt durch 4, so erhält man 9. Welches ist diese Zahl?

6) Multipliciert man den 3. Teil einer Zahl mit ihrem 5. und 10. Teil und dividiert das erhaltene Produkt durch 3, so erhält man $7\frac{1}{2}$. Wie heißt die zu suchende Zahl?

Schriftlich.

1) Wie groß ist die Kante eines Würfels von 39,304 cbm Inhalt?

2) Ein rechtwinkeliger Stein von 96 cm Höhe, 33 cm Breite und 25 cm Dicke hat mit einem kubischen Steine von demselben Material gleiches Gewicht. Wie groß ist jede Seite des kubischen Steines?

3) Wie groß ist die Seite eines Würfels, der doppelt so groß ist als ein anderer Würfel von 60 cm Höhe?

4) Wie groß ist die Kante eines Würfels, der so groß ist als vier Würfel zusammen, von denen der erste 24 cm, der zweite 15 cm, der dritte 9 cm und der vierte 21 cm hoch ist?

5) Man bestimme die unbekannten Glieder folgender Proportion: $5 : x^2 = x : 102{,}4$!

6) Nach einem von dem Astronomen Kepler entdeckten Gesetze verhalten sich die Quadratzahlen der Umlaufszeiten zweier Planeten wie die 3ten Potenzen ihrer mittleren Sonnenabstände. Wenn nun die Umlaufszeit der Erde 1 Jahr, die des Jupiter c. 12 Jahre, der Sonnenabstand der Erde 20 Millionen Meilen beträgt, wie läßt sich hieraus der Sonnenabstand des Jupiter berechnen?

Anhang zu den Paragraphen 21 und 22.

Das Ausziehen höherer Wurzeln.

Mündlich.

1) $\sqrt{\sqrt{16}}$. 2) $\sqrt{\sqrt{81}}$. 3) $\sqrt[4]{256}$. 4) $\sqrt[4]{1296}$.

5) $\sqrt[4]{625}$. 6) $\sqrt[4]{4096}$. 7) $\sqrt[4]{160000}$. 8) $\sqrt[4]{6250000}$.

9) $\sqrt[4]{0{,}0016}$. 10) $\sqrt[4]{0{,}0256}$. 11) $\sqrt[4]{16:81}$. 12) $\sqrt[4]{256:625}$.

13) $\sqrt[6]{64}$. 14) $\sqrt[6]{729}$. 15) $\sqrt[6]{4096}$. 16) $\sqrt[6]{0{,}000064}$.

17) $\sqrt[6]{0{,}000729}$. 18) $\sqrt[8]{256}$. 19) $\sqrt[8]{6561}$. 20) $\sqrt[8]{0{,}00000256}$.

Schriftlich.

1) $\sqrt[4]{54700816}$. 2) $\sqrt[4]{31640625}$.

3) $\sqrt[4]{3603000625}$. 4) $\sqrt[4]{14166950625}$.

5) $\sqrt[6]{8303765625}$. 6) $\sqrt[6]{0,004096}$.

7) $\sqrt[6]{65}$. 8) $\sqrt[6]{126081}$.

9) $\sqrt[6]{24794911296}$. 10) $\sqrt[6]{168425239515625}$.

§ 23. Das Radizieren der verschiedenen Zahlformen.

I. Das Radizieren von Monomen.

a) Das Potenzieren von Wurzeln und das Radizieren von Potenzen mit ihren Exponenten.

Mündlich.

1) $(\sqrt{36})^2$. 2) $(\sqrt{ab})^2$. 3) $(\sqrt{-a})^2$.

4) $(\sqrt{3x+4})^2$. 5) $(\sqrt{3a-5b})^2$. 6) $(\sqrt{3x-5y+7z})^2$.

7) $(\sqrt[3]{8})^3$. 8) $(\sqrt[3]{-8})^3$. 9) $(\sqrt[3]{x-y})^3$.

10) $(\sqrt[3]{a:b})^3$. 11) $(\sqrt[5]{-a:b})^5$. 12) $(\sqrt[7]{a:b+m})^7$.

13) $\sqrt{5^2}$. 14) $\sqrt{(a+b)^2}$. 15) $\sqrt{(3x+4y)^2}$.

16) $\sqrt[3]{8^3}$. 17) $\sqrt[3]{(-8)^3}$. 18) $\sqrt[3]{(a-b)^3}$.

19) $\sqrt[m]{(a:b)^m}$. 20) $\sqrt{((m-n):p)^2}$ 21) $\sqrt[3]{(m:n+b)^3}$.

22) Es sollen die nachfolgenden Ausdrücke in Form von Potenzen mit den Exponenten 2, 3, 5 und n geschrieben werden: + 15; — 7; a; a + b; a — b; ab; a : b; 3a — 5b + 7c!

23) Die nachfolgenden Ausdrücke sollen in 2, 3, 5 und n gleiche Faktoren zerlegt werden: 11; — 17; a + b; — ab; (a — b) : c.

24) Jede der nachfolgenden Differenzen soll man in die Differenz zweier Quadrate und sodann in ein Produkt binomischer Faktoren verwandeln: m — n; r — s; m : n — p : r; $m^2 - np^2$.

25) Folgende Ausdrücke sollen in Form von Wurzeln mit den Wurzelexponenten 2, 3, 5 und n dargestellt werden: + 13; — 17; a; — m; 3a + 4b — 5c.

26) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$. 27) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a}$.

28) $\sqrt{m-n} \cdot \sqrt{m-n}$. 29) $\sqrt[3]{a-1} \cdot \sqrt[3]{a-1} \cdot \sqrt[3]{a-1}$.

30) $(5\sqrt{a})^2$. 31) $(a\sqrt{b})^2$. 32) $(2\sqrt[3]{2})^3$.

33) $\sqrt[4]{x^4} - \sqrt[3]{y^3} + \sqrt[5]{z^5} + (\sqrt[n]{a})^n + x : (\sqrt{x-y})^2$.

34) $x + (\sqrt[5]{x-y})^5 + 4\sqrt[7]{(x-y)^7} - 5(\sqrt[8]{x-y})^8 - \sqrt{(x-y)^2}$.

35) $2a + 3\sqrt[3]{(a+b)^2} - 2(\sqrt{a+b})^3 + 4\sqrt[4]{(a+b)^4} + 5(\sqrt[9]{a+b})^9$.

36) $(\sqrt[7]{113})^4 \cdot (\sqrt[7]{113})^3 + (\sqrt[19]{223})^{11} \cdot (\sqrt[19]{223})^{-4} \cdot (\sqrt[19]{223})^{12}$.

37) $(\sqrt[n]{a})^{3x-4y} \cdot (\sqrt[n]{a})^{4n-3x} \cdot (\sqrt[n]{a})^{4y-3n}$.

38) $(4\sqrt{a})^2 + (3\sqrt[3]{a})^3 + (2\sqrt[4]{a})^4 - (3\sqrt[5]{a-b})^5$.

39) $(\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{7} \cdot \sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{9} \cdot \sqrt[5]{11})^5$.

40) $\sqrt[3]{\dfrac{(9x^2 - y^2)(3x - y)^2}{3x + y}}$

41) $\sqrt[3]{\dfrac{(16a^2 - 4b^2)(4a + 2b)^2}{4a - 2b}}$.

b) Radizieren von Produkten.

Mündlich.

1) $\sqrt{9 \cdot 25}$. 2) $\sqrt{25 \cdot 36}$. 3) $\sqrt{121 \cdot 169}$.

4) $\sqrt[n]{abc}$. 5) $\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 125}$. 6) $\sqrt[3]{8 \cdot 1000 \cdot 729}$.

7) $\sqrt{m^2n^2}$. 8) $\sqrt{a^2b^2c^2}$. 9) $\sqrt{196a^2b^2c^2}$.

10) $\sqrt[3]{a^3b^3}$. 11) $\sqrt[3]{216m^3n^3}$. 12) $\sqrt[5]{a^5b^5}$.

13) $\sqrt{18}$. 14) $\sqrt{32}$. 15) $\sqrt{125}$.

16) $\sqrt{48}$. 17) $\sqrt{800}$. 18) $\sqrt{648}$.

19) $\sqrt[3]{24}$. 20) $\sqrt[3]{40}$. 21) $\sqrt[3]{500}$.

22) $\sqrt{72 \cdot 32}$. 23) $\sqrt{48 \cdot 108}$. 24) $\sqrt{320 \cdot 405}$.

25) $\sqrt{a^2b}$. 26) $\sqrt{m^2n}$. 27) $\sqrt{5x^2y^2}$.

28) $\sqrt[3]{a^3b}$. 29) $\sqrt[3]{a^3b^3c}$. 30) $\sqrt[6]{a^6b}$.

31) $\sqrt{8a^3b}$. 32) $\sqrt{50mn^3}$. 33) $\sqrt[3]{16m^4n^4p}$.

34) $3\sqrt[5]{64a^6bc^6}$. 35) $\sqrt[x]{a^{x+2}b^{x+3}}$.

c) Radizierung von Brüchen.

Mündlich.

1) $\sqrt{\frac{9}{16}}$. 2) $\sqrt{\frac{81}{64}}$. 3) $\sqrt[3]{\frac{216}{343}}$.

4) $\sqrt{\frac{m^2}{n^2}}$. 5) $\sqrt{\frac{9a^2b^2}{16c^2}}$. 6) $\sqrt{\frac{36x^2y^2z^2}{49t^2}}$.

7) $\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^3}}$. 8) $\sqrt[3]{\frac{8a^3b^3}{27c^3}}$. 9) $\sqrt[3]{\frac{64x^3y^3z^3}{125m^3}}$.

10) $\sqrt{\frac{3}{4}}$. 11) $\sqrt{\frac{7m}{16}}$. 12) $7\sqrt{\frac{5a}{49b^2}}$.

13) $\sqrt{\frac{1}{2}}$. 14) $\sqrt{\frac{1}{5}}$. 15) $\sqrt{\frac{3}{7}}$.

16) $\sqrt{\frac{a}{b}}$. 17) $\sqrt{\frac{x}{y}}$. 18) $m\sqrt{\frac{n}{m}}$.

d) Radizierung von Potenzen.

Mündlich.

1) $\sqrt[3]{8^5}$. 2) $\sqrt[3]{216^2}$. 3) $\sqrt[4]{81^3}$.

4) $\sqrt{36^3}$ 5) $\sqrt{169^3}$. 6) $\sqrt{144^3}$.

7) $\sqrt{(\frac{9}{16})^3}$. 8) $\sqrt{(\frac{16}{25})^3}$. 9) $\sqrt[3]{(\frac{27}{64})^2}$.

10) $\sqrt[3]{8^2} + \sqrt{36^3} + \sqrt[3]{27^4} + \sqrt{49^3}$.

11) $\sqrt{2^4}$. 12) $\sqrt{5^4}$. 13) $\sqrt{2^6}$.

14) $\sqrt{a^8}$. 15) $\sqrt[5]{a^{35}}$. 16) $\sqrt[17]{a^{136}}$.

17) $\sqrt[23]{m^{161}}$. 18) $\sqrt[x]{a^{xyz}}$. 19) $\sqrt[x]{a^{7x}}$.

20) $\sqrt{a^4b^6}$. 21) $\sqrt{m^{12}n^{18}}$. 22) $\sqrt[3]{a^3b^3}$.

23) $\sqrt{a^6b^{10}c^{12}}$. 24) $\sqrt{a^4b^6c^8d^{10}}$. 25) $\sqrt[3]{a^{12}b^{15}m^{18}}$.

26) $\sqrt[3]{a^9b^{12}c^{15}d^{18}}$. 27) $\sqrt[4]{16a^8b^{12}}$. 28) $\sqrt[5]{a^5b^{15}c^{25}}$.

29) a) $\sqrt{4^2a^{-6}b^{-8}}$. b) $\sqrt[3]{-8a^9}$. c) $\sqrt[3]{3^3a^{-12}}$.

30) $\sqrt{a^9}$. 31) $\sqrt{a^7}$. 32) $\sqrt{x^{13}}$.

33) $\sqrt[3]{m^6n^9p^{12}}$. 34) $\sqrt[3]{a^{22}}$. 35) $\sqrt[m]{a^{3m+2}}$.

36) $\sqrt[n]{a^{n+2}}$. 37) $\sqrt[x]{a^{3x+2}}$. 38) $\sqrt[m+1]{a^{5m+5}b^{7m+7}}$.

39) $\sqrt{10a^7b^{12}c^{15}}$. 40) $\sqrt[3]{16x^5y^9z^{17}}$. 41) $\sqrt[3]{3^7(m-n)^9}$.

42) $\sqrt{\frac{36m^4}{49n^6}}$. 43) $\sqrt{\frac{81a^6}{121b^4c^8}}$. 44) $\sqrt[3]{\frac{125c^{48}}{216b^{21}c^{24}}}$.

45) $\sqrt[3]{\frac{216a^9x^{15}}{343b^{12}y^{18}}}$. 46) $\sqrt[5]{\frac{243a^{15}b^{25}}{32c^{20}d^{30}}}$.

47) $\sqrt[4]{\frac{16a^{16}b^{-20}c^{-8}}{81d^{12}f^{-24}g^{-32}}}$. 48) $\sqrt[3]{\frac{8a^9b^{12}(x+y)^{-3m}}{27c^{-6m}d^{15}f^{18}}}$.

49) $\sqrt{\frac{2^8a^{-12}(a+b)^{16}(3+x)^{-20}}{81c^{24}d^{-28}f^{32}}}$.

e) Radizierung von Wurzeln.

Mündlich.

1) $\sqrt{\sqrt{16}}$. 2) $\sqrt{\sqrt{81}}$. 3) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$.

4) $\sqrt[3]{\sqrt{729}}$. 5) $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$. 6) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{m}}$.

7) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{5}}}$. 8) $\sqrt{9\sqrt{a^8}}$.

9) $\sqrt{25a^{4p}\sqrt[3]{a^{12q}b^{6r}}}$. 10) $\sqrt{16a^2\sqrt{b^8\sqrt{c^{12}}}}$.

11) $\sqrt{25a^4\sqrt[3]{a^{12}b^{12}}}$. 12) $\sqrt{\frac{x^2}{\sqrt{y^4}}}$. 13) $\sqrt[3]{\sqrt{27}}$.

14) $\sqrt[3]{\sqrt{125}}$. 15) $\sqrt{\sqrt[3]{169}}$. 16) $\sqrt{\sqrt[3]{4a^2}}$.

17) $\sqrt{\sqrt[3]{\frac{49}{81}a^4b^4c^2}}$. 18) $\sqrt{\sqrt[3]{36m^2n^4}}$.

19) $\sqrt[4]{25}$.

f) Erweiterung und Kürzung der Wurzeln.

Mündlich.

1) Man mache die nachfolgenden Wurzeln gleichnamig:

a) $\sqrt[3]{a^2}$ und $\sqrt[2]{a^3}$; b) $\sqrt[5]{a^3}$ und $\sqrt[8]{a^9}$; c) $\sqrt[7]{x^5}$ und $\sqrt[8]{x^7}$;

d) $\sqrt{a^2}$ und $\sqrt[3]{a^4}$ und $\sqrt[4]{a^5}$!

2) Man bringe die nachfolgenden Wurzelausdrücke auf einfachere Formen: a) $\sqrt[9]{a^6}$; b) $\sqrt[12]{a^{18}}$; c) $\sqrt[4]{a^{10}}$; d) $\sqrt[14]{a^{35}}$;

e) $\sqrt[35]{x^{49}}$!

II. Das Ausziehen der Quadratwurzel aus Polynomen.

Mündlich.

1) $x^2 + 2xy + y^2$.

2) $x^2 - 2xy + y^2$.

3) $x^2 - xy + \frac{y^2}{4}$.

4) $x^2 + xy + \frac{y^2}{4}$.

5) $x^2 + 2x + 1$.

6) $x^2 - ax + \frac{a^2}{4}$.

7) $x^2 - 6x + 9$.

8) $4x^2 + 12xy + 9y^2$.

9) $16x^4 + 40x^2y^3 + 25y^6$.

10) $9x^6 + 24x^3y^4 + 16y^8$.

11) $81a^6 - 216a^3b^4 + 144b^8$.

12) $9p^2 - 30pq + 25q^2$.

13) $144x^{10} - 360x^5y^2 + 225y^4$.

14) $400a^{12} - 1200a^6b^8 + 900b^{16}$.

15) $\frac{4x^2}{9} + 2xy + \frac{9y^2}{4}$.

16) $\frac{16x^2}{49y^2} - \frac{16}{7} + \frac{4y^2}{x^2}$.

17) $\frac{25}{4}x^2y^2 - \frac{5}{3}xyz^2 + \frac{1}{9}z^4$.

18) $\frac{x^2}{y^2} + \frac{4x}{3z} + \frac{4y^2}{9z^2}$.

19) $x^{2m} + 2x^my^n + y^{2n}$.

20) $x^{2m} - 4x^{m+n} + 4x^{2n}$.

21) $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{x^4 + 6x^2y + 9y^2}$.

22) $\frac{9x^4 + 24x^2y^3 + 16y^6}{4a^4 - 20a^2b + 25b^2}$.

Schriftlich.

1) $a^2 + 2ab + b^2 + 2ax + 2bx + x^2$.

2) $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24xz - 16yz + 16z^2$.

3) $4 + 12x + 25x^2 + 24x^3 + 16x^4$.

4) $9x^4 - 30x^2y^3 + 25y^6 + 36x^2z^4 - 60y^3z^4 + 36z^8$.

5) $\frac{9a^2b^2}{16} - \frac{5abcd}{4} + \frac{25c^2d^2}{36} + \frac{3abe}{4} - \frac{5cde}{6} - \frac{e^2}{4}$.

6) $\frac{y^2}{4x^2} - \frac{3y^3}{z} - \frac{2xy^4}{z^2} + \frac{9x^2y^4}{z^2} + \frac{12x^3y^5}{z^3} + \frac{4x^4y^6}{z^4}$.

7) $- 30a^7x^3 + 25a^8x^2 + 4a^3x^7 + 29a^6x^4 - 2a^5x^5 - 2a^4x^6 + a^2x^8$. (Zu ordnen).

8) $\frac{25}{4}a^{-4} + \frac{15}{4}a^{-5}b - \frac{133}{48}a^{-6}b^2 - a^{-7}b^3 + \frac{4}{9}a^{-8}b^4$.

III. Das Ausziehen der Kubikwurzel aus Polynomen.

Mündlich.

1) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.

2) $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$.

3) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$.

4) $1 - 9x + 27x^2 - 27x^3$.

5) $27x^6 + 108x^4y^3 + 144x^2y^6 + 64y^9$.

6) $a^{3m} - 6a^{2m+1}b^n + 12a^{m+2}b^{2n} - 8a^3b^{3n}$.

7) $\frac{8x^3}{27} - \frac{2x^2y}{3} + \frac{xy^2}{2} - \frac{y^3}{8}$.

8) $\frac{64x^3}{125} + \frac{72x^2y^2}{25} + \frac{54xy^4}{10} + \frac{27y^6}{8}$.

9) $\frac{m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3}{p^3 - 3p^2q + 3pq^2 - q^3}$.

Schriftlich.

1) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 3x^2z - 6xyz - 3y^2z - 3xz^2 + 3yz^2 - z^3$

2) $27a^6 + 54a^5b + 144a^4b^2 + 152a^3b^3 + 192a^2b^4 + 96ab^5 + 64b^6$.

3) $125x^6 - 525x^5y + 60x^4y^2 + 1547x^3y^3 - 108x^2y^4 - 1701xy^5 - 728y^6$.

4) $1 - 3a + 9a^2 - 13a^3 + 18a^4 - 12a^5 + 8a^6$.

5) $\frac{64}{125}a^9b^{-6} - \frac{16}{25}a^5b^{-1}c^{-2} + \frac{4}{15}ab^4c^{-4} - \frac{1}{27}a^{-3}b^9c^{-6}$.

§ 24. Addition und Subtraktion von Wurzeln.

Mündlich.

1) $4\sqrt{7} + 3\sqrt{7}$.

2) $8\sqrt{11} - 5\sqrt{11}$.

3) $4\sqrt[5]{4} + 18\sqrt[5]{4} - 15\sqrt[5]{4} + \sqrt[5]{4} + 30\sqrt[5]{4}$.

4) $5\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} + 8\sqrt[3]{2} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{2} - \frac{5}{8}\sqrt[3]{2}$.

5) $4\sqrt[6]{5} - 2\sqrt[7]{6} + 6\sqrt[6]{5} - 11\sqrt[7]{6} + 15\sqrt[6]{5} + 14\sqrt[7]{6}$.

6) $\sqrt{18} + \sqrt{32}$. 7) $\sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{50}$.

8) $\sqrt{72} - \sqrt{50} + \sqrt{98}$. 9) $\sqrt{147} + \sqrt{108} + \sqrt{432}$.

Schriftlich.

α) **Gleiche Wurzeln.**

1) $12\sqrt[5]{13a^2b^3} - 11\sqrt[m]{2} - 5\sqrt[n]{7} - 9\sqrt[5]{13a^2b^3} + 15\sqrt[m]{2}$
$+ 6\sqrt[n]{7} + 13\sqrt[5]{13a^2b^3} + 18\sqrt[m]{2} + 19\sqrt[n]{7}$.

2) $(19\sqrt[9]{7} - \sqrt[6]{5} + 3\sqrt[3]{2}) - (16\sqrt[9]{7} + 3\sqrt[6]{5} - 8\sqrt[3]{2})$.

3) $(10\sqrt{5abc} + 14\sqrt[3]{cd} - \sqrt[m]{a}) - (-11\sqrt{5abc} - 15\sqrt[3]{cd}$
$+ 3\sqrt[m]{a})$.

β) **Gleichnamige Wurzeln.**

1) $\sqrt{20} + \sqrt{45} + \sqrt{80} + \sqrt{125} - \sqrt{180}$.

In dieser sowie in den folgenden Aufgaben suche man die Radikanden so in zwei oder mehrere Faktoren zu zerlegen, daß die betreffende Wurzel aus einzelnen derselben gezogen werden kann.

2) $\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{96} + \sqrt{150} + \sqrt{294} - \sqrt{6}$.

3) $\sqrt{28} + \sqrt{63} - \sqrt{252} + \sqrt{175} + \sqrt{448}$.

4) $3\sqrt{18} - 4\sqrt{8} + 5\sqrt{32} - \sqrt{50} + 5\sqrt{72} - \sqrt{98}$.

5) $5\sqrt{27} - 4\sqrt{12} + 2\sqrt{48} - \sqrt{75} + 10\sqrt{147} - \sqrt{108}$.

6) $\sqrt{32} - 3\sqrt{72} + 5\sqrt{200} - 2\sqrt{128} + 5\sqrt{800} - 5\sqrt{648}$.

7) $5\sqrt[3]{16} - 3\sqrt[3]{54} + 3\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{250}$.

8) $-3\sqrt[3]{24} + 4\sqrt[3]{81} + 5\sqrt[3]{192} - 2\sqrt[3]{375} + 10\sqrt[3]{648}$.

9) $10\sqrt[3]{384} - 5\sqrt[3]{3072} + 12\sqrt[3]{2058} + 20\sqrt[3]{48} - 5\sqrt[3]{4374}$
$+ 11\sqrt[3]{750} - \sqrt[3]{1296}$.

10) $\sqrt{12a^3} - \sqrt{27a^3} + \sqrt{75a^3} - \sqrt{147ab^2}$.

11) $\sqrt{24a^5b^7} - \sqrt{54a^3b^3} + \sqrt{96a^5b^7}$.

12) $2\sqrt{12a^5b^3c} + 4\sqrt{48a^3b^5c^7} - 5\sqrt{75abc}$.

13) $3\sqrt{405} + 6\sqrt{320} - 3\sqrt{720} + 6\sqrt{1620} - \sqrt{20}$.

§ 25. Multiplikation von Wurzeln.

a) Gleichnamige Wurzeln.

Mündlich.

1) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$; $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$.
2) $\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}$.
3) $\sqrt[3]{ab^2} \cdot \sqrt[3]{a^2b}$.
4) $\sqrt[3]{36} \cdot \sqrt[3]{40}$; $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$.
5) $(3\sqrt{2})^2$.
6) $(5\sqrt[3]{3})^2$.
7) $\sqrt[m]{a^3\,b^2} \cdot \sqrt[m]{a^{2m}b^n}$
8) $5\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt{\frac{5}{8}}$.
9) $9\sqrt{\frac{3}{8}} \cdot 5\sqrt{\frac{7}{5}}$.
10) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{12}} \cdot \frac{3}{4}\sqrt{\frac{6}{7}}$.
11) $3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{6}$.
12) $4\sqrt[3]{(x+y)^2} \cdot 3\sqrt[3]{(x+y)^2}$.
13) $3\sqrt{15} \cdot 4\sqrt{30}$.
14) $5\sqrt{24} \cdot 3\sqrt{28}$.
15) $3\sqrt{12} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 5\sqrt{24}$.
16) $\sqrt[3]{12} \cdot 4\sqrt[3]{6} \cdot 5\sqrt[3]{10}$.
17) $\frac{3\sqrt{a^5}}{5b^2} \cdot \frac{3}{17}\sqrt{a^2b^3}$.
18) $\frac{5\sqrt{b^6}}{6c} \cdot \frac{4}{9}\sqrt{a^2b^3}$.
19) $(3\sqrt{6} - 4\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) \cdot \sqrt{6}$.
20) $(\sqrt{3} + 3\sqrt{6} + 2\sqrt{8}) \cdot 3\sqrt{3}$.
21) $(3 + 7\sqrt{3})(2 - 3\sqrt{3})$.
22) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$.
23) $(\sqrt{6} - \sqrt{5})^2$.
24) $(\sqrt{x-y} + \sqrt{x+y})^2$.
25) $\sqrt{3 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{5}}$.
26) $\sqrt[4]{\sqrt{21} - \sqrt{5}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{21} + \sqrt{5}} + \sqrt[6]{5\sqrt{2} - 7} \cdot \sqrt[6]{5\sqrt{2} + 7}$.
27) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$.

Schriftlich.

1) $(3\sqrt{5} + 2\sqrt{6})(2\sqrt{3} - 5\sqrt{6})$.
2) $(5\sqrt{7} - 3\sqrt{11})(6\sqrt{7} + 9\sqrt{11})$.
3) $(5\sqrt{14} + 9\sqrt{5})(8\sqrt{14} - 7\sqrt{5})$.
4) $\left(\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} - \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}\right)\left(\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}\right)$.

b) Ungleichnamige Wurzeln.

Mündlich.

1) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{3}$. 2) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{2}$.

3) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{5}$. 4) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2}$.

5) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{3}$. 6) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[5]{b^3}$.

7) $\sqrt[4]{x^2} \cdot \sqrt[5]{y^3}$. 8) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[7]{b^2}$.

Schriftlich.

1) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[4]{c}$. 2) $3\sqrt{3} \cdot 2\sqrt[3]{2}$.

3) $3\sqrt{5} \cdot 4\sqrt[4]{3}$. 4) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{5}$.

5) $2\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 3\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$. 6) $\sqrt{7} \cdot \sqrt[3]{7}$.

7) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{6}$. 8) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{7}$.

9) $\sqrt[5]{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt[10]{6} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$. 10) $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[6]{\frac{1}{2}}$.

11) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[4]{\frac{5}{6}}$. 12) $\frac{a}{c}\sqrt{\frac{ab}{d}} \cdot \frac{d}{g}\sqrt[4]{\frac{c^3}{d^2f^3}}$.

13) $\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{a^3}{b^3}} \cdot \sqrt[5]{\frac{b^4}{a^4}} \cdot \sqrt[6]{\frac{a^5}{b^5}}$.

14) $\sqrt{\frac{a^{-1}b}{c^{-1}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{a^{-2}b^{-1}}{c}} \cdot \sqrt[4]{\frac{a^{-3}b^{-2}}{c^{-3}}} \cdot \sqrt[5]{\frac{c^{-4}}{a^{-4}b^2}} \cdot$
$\sqrt[6]{\frac{a^{-2}b^{-5}}{c}}$.

15) $(3\sqrt{3} + 2\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[4]{5}) \cdot 2\sqrt{3}$.

c) Vor Wurzelzeichen stehende Koefficienten sind unter dasselbe zu schaffen.

Mündlich.

1) $2\sqrt{3} + 3\sqrt{5} + 4\sqrt{6} - 3\sqrt{7}$

2) $2\sqrt{2} + 7\sqrt{5} + 2\frac{1}{2}\sqrt{7} - 3\sqrt{0{,}29} + 0{,}4\sqrt{3{,}1}.$

3) $3\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{5} + 10\sqrt{6} + 9\sqrt{2}.$

4) $x\sqrt{\frac{y}{x}}.$ 5) $(x + y)\sqrt{\frac{xy}{x^2 + 2xy + y^2}}.$

6) $(a - b)\sqrt{\frac{a + b}{a - b}}.$ 7) $mn\sqrt{\frac{1}{mn}}.$

Schriftlich.

1) $(x + y)\sqrt{\frac{a + b}{x^2 - y^2}}.$ 2) $\frac{a^2b^3}{c^2}\sqrt{\frac{c^3}{a^3b^5}}.$

3) $\frac{x - y}{x + y}\sqrt{\frac{xz}{x^2 - 2xy + y^2}}.$ 4) $(a + 1)\sqrt{\frac{b^2c}{a^2 - 1}}.$

5) $\frac{a + b}{a - b}\sqrt{\frac{a - b}{a + b}} + \frac{a - b}{a + b}\sqrt{\frac{a + b}{a - b}}.$

6) $\frac{3x + 4y}{9 - x}\sqrt{\frac{3(81 - 18x + x^2)}{5(9x^2 + 24xy + 16y^2)}}.$

§ 26. Division von Wurzeln.

a) Gleichnamige Wurzeln.

Mündlich.

1) $\sqrt{12} : \sqrt{4}.$ 2) $\sqrt[3]{12} : \sqrt[3]{3}.$

3) $21\sqrt[4]{72} : 3\sqrt[4]{18}.$ 4) $\sqrt[3]{a^2} : \sqrt[3]{a}.$

5) $\sqrt[3]{a^5b^2} : \sqrt[3]{a^3b^4}.$ 6) $\sqrt[5]{a^4b^3} : \sqrt[5]{a^2b^4}.$

7) $18\sqrt[8]{24a^4b^3} : 6\sqrt[8]{8a^5}.$

8) $15\sqrt[5]{(2a + 4b)^6} : 5\sqrt[5]{(2a + 4b)^2}.$

9) $(\sqrt{18} + \sqrt{24} - \sqrt{39} + \sqrt{45}) : \sqrt{3}.$

10) $(24\sqrt{15} + 48\sqrt{25} - 56\sqrt{10}) : 8\sqrt{5}.$

11) $(28\sqrt{24} - 35\sqrt{48} + 63\sqrt{72} + 14\sqrt{32}) : 7\sqrt{8}.$

b) Ungleichnamige Wurzeln.

Mündlich.

1) $\sqrt{3} : \sqrt[4]{4}$. 2) $\sqrt{3} : \sqrt[6]{2}$. 3) $\sqrt[3]{2} : \sqrt[6]{5}$.

4) $\sqrt[3]{4} : \sqrt[4]{7}$. 5) $\sqrt{a} : \sqrt[3]{a}$. 6) $\sqrt[4]{xy^2} : \sqrt[3]{x^2y}$.

Schriftlich.

1) $4\sqrt{3} : 2\sqrt[4]{\tfrac{3}{2}}$.

2) $6\sqrt{5} : 3\sqrt[3]{9}$.

3) $35\sqrt[4]{5} : 7\sqrt[5]{6}$.

4) $\sqrt[3]{a^7} : \sqrt[5]{a^3}$.

5) $\sqrt{a} : \sqrt[3]{a}$.

6) $\sqrt[5]{a^2b^3c^4} : \sqrt[4]{a^3b^2c^3}$.

7) $\sqrt[5]{a^4b^3c^2} : 4\sqrt[4]{a^3bc}$.

8) $15\sqrt[3]{a^2b^2c} : 5\sqrt[4]{a^3b^3c^2}$.

9) $45\sqrt[7]{16} : 9$.

10) $15 : 5\sqrt[5]{25}$.

11) $\sqrt{\frac{b}{a}} : \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$.

12) $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}} : \frac{b}{a}\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$.

13) $\frac{2}{3}\sqrt[4]{\frac{a^{-2}b}{c^{3}}} : \frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{a^2b^{-5}}{c^7}}$.

14) $\frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{a^3}{b^3}} : \frac{4}{5}\sqrt[6]{\frac{a^4}{b^4}}$.

c) Rationalmachen des Nenners.

Mündlich.

1) $\frac{3}{\sqrt{2}}$. 2) $\frac{7}{\sqrt{2}}$. 3) $\frac{6}{\sqrt{3}}$.

$\frac{4}{\sqrt{3}}$. 5) $\frac{8}{\sqrt{20}}$. 6) $\frac{14}{\sqrt[3]{54}}$.

7) $\frac{3 + \sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. 8) $\frac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. 9) $\frac{4 + \sqrt{3} + 4\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$.

Schriftlich.

1) $1 : (3 + \sqrt{3})$. 2) $1 : (2 - \sqrt{2})$.

3) $1 : (\sqrt{3} + 2)$. 4) $2 : (1 + \sqrt{3})$.

5) $(2 + \sqrt{3}) : (2 - \sqrt{3})$.

6) $(3 + \sqrt{5}) : (3 - \sqrt{5})$.

7) $(3\sqrt{5} - 3\sqrt{7}) : (2\sqrt{5} + \sqrt{15})$.

8) $(6\sqrt{3} - 5\sqrt{7}) : (8\sqrt{3} + 2\sqrt{7})$.

9) $(2\sqrt{7} - 8\sqrt{3}) : (2\sqrt{2} - 5\sqrt{6})$.

§ 27. Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

a) Potenzieren der verschiedenen Zahlformen (Umformung der Bruchpotenzen).

Mündlich.

1) $8^{\frac{2}{3}}$ 2) $16^{\frac{1}{2}}$. 3) $25^{\frac{1}{2}}$.

4) $8^{-\frac{2}{3}}$. 5) $16^{-\frac{1}{2}}$. 6) $25^{-\frac{1}{2}}$.

7) $4^{\frac{2}{3}}$. 8) $81^{\frac{1}{4}}$. 9) $125^{\frac{1}{3}}$.

10) $(8 \cdot 27)^{\frac{2}{3}}$. 11) $(16 \cdot 25)^{\frac{1}{2}}$. 12) $(16 \cdot 81)^{\frac{1}{4}}$.

13) $\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$. 14) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}$. 15) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$.

16) $(81^{\frac{3}{4}})^{\frac{2}{3}}$. 17) $(25^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}}$. 18) $81^{\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{4}}$.

19) $(16^{-\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}$. 20) $(\sqrt{64})^{\frac{2}{3}}$. 21) $\sqrt{(64)^{-\frac{2}{3}}}$.

22) $(a + b)^{\frac{1}{2}}$. 23) $(a + b)^{\frac{2}{3}}$. 24) $(x - y)^{\frac{m}{n}}$.

b) Verwandlung von Wurzeln in Bruchpotenzen.

Mündlich.

1) $\sqrt{a + b}$. 2) $\sqrt[3]{(a + b)^2}$. 3) $\sqrt{(a + b)^3}$.

4) $\sqrt{a^3b^5}$. 5) $\sqrt[6]{8^3}$. 6) $\sqrt[9]{a^7}$.

7) $\sqrt[15]{(a + b)^{10}}$. 8) $\sqrt[18]{(x - y)^{15}}$. 9) $\sqrt[m]{(a + b)}$.

10) $\sqrt[7]{\frac{a^4b^5c^6}{d^3f^4g^5}}$. 11) $\sqrt[9]{\frac{a^6b^7}{c^{12}d^{11}}}$. 12) $\frac{\sqrt{c + g}}{\sqrt[5]{a^3}}$.

c) Das übrige Rechnen mit Bruchpotenzen.

Mündlich.

1) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{4}}$ 2) $a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{4}}b^{-\frac{1}{3}}$.

3) $3ab \cdot 4a^{-\frac{3}{4}}b^{-2}$.

4) $3(a + b)^{\frac{3}{5}} \cdot 2\sqrt[6]{(a + b)^5}$.

5) $(a^{\frac{2}{5}} + b^{\frac{5}{2}})(a^{\frac{2}{5}} - b^{\frac{5}{2}})$.

6) $15^{\frac{3}{4}} : 15^{\frac{2}{3}}$.

7) $45^{\frac{5}{9}} : 45^{\frac{4}{7}}$.

8) $a^{\frac{4}{5}} : a^{\frac{3}{4}}$.

9) $3a^{\frac{3}{8}} : 4a^{\frac{2}{7}}$.

10) $3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}} : 6a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{2}{3}}$.

11) $15x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{6}{7}} : 5x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{2}{3}}$.

§ 28. Das Rechnen mit imaginären Größen.

Mündlich.

1) $\sqrt{-16}$.

2) $\sqrt{-144}$.

3) $\sqrt{-75}$.

4) $4\sqrt{-72}$.

5) $\sqrt[4]{-16}$.

6) $\sqrt[4]{-81}$.

7) $\sqrt{-36} + \sqrt{-49} + \sqrt{-64} - \sqrt{-100}$.

8) $\sqrt{-16} + 5\sqrt{-25} + 4\sqrt{-81}$.

9) $\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-12}$.

Anhang zum III. Abschnitt.

Vermischte Aufgaben.

1) $\sqrt[3]{\sqrt{27^2 \cdot 64^2}} + \sqrt[3]{\sqrt[m]{125^m \cdot 216^m}} + \sqrt[4]{\sqrt{16^2 \cdot 81^2}}$.

2) $\sqrt{(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)^2}$.

3) $\sqrt[3]{\frac{x + y}{z}} \cdot \sqrt[3]{\frac{(x + y)^2}{t}} \cdot \sqrt[3]{zt}$.

4) $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{27^2}{64^2}}} + \sqrt[2]{\sqrt[3]{\frac{25^3}{49^3}}} + \sqrt[4]{\sqrt{\frac{16^2}{81^2}}}$.

5) $\sqrt{2\frac{(x^2 + y^2)^2}{z^2} - 2\frac{(x^2 - y^2)^2}{z^2}}$.

6) $\sqrt[5]{(x^3y^2z^4)^5(x^2y^3z^6)^4} : \sqrt[5]{(x^2y^4z)^3(x^3y^5z^2)^2}$.

7) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{405}}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{304}}{\sqrt{19}} - \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{105}}{\sqrt{2\frac{1}{7}}}$.

8) $\sqrt[5]{\frac{x^{-3}y^{-4}}{z^{-2}}} : \sqrt[6]{\frac{x^{-5}y^{-3}}{z^{2}}}$.

9) $\sqrt{(x^2 + 2xy + y^2)^3} + \sqrt{(x^2 - 2xy + y^2)^3}$.

10) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^7b^5c^{-10}}} \cdot \sqrt{\sqrt[6]{a^{11}b^{-9}c^{11}}}$.

11) $3\sqrt[4]{\sqrt[15]{9}} + 4\sqrt[10]{\sqrt[6]{9}} - 2\sqrt[6]{\sqrt[10]{7}} + \sqrt[12]{\sqrt[5]{7}}$.

Vierter Abschnitt.

Vermischte Reduktionen *).

§ 29. Ausdrücke ohne Wurzelgrößen.

a) Der zu reducierende Ausdruck ist ein Produkt mit zusammengesetzten Faktoren.

1) $\left(\frac{x}{x-z}+\frac{x+z}{x}\right)\cdot\frac{x-z}{2x^2-z^2}$.

2) $\left(\frac{5a-4b}{7b}+\frac{5b}{5a+4b}\right)\cdot\frac{35a^2+28ab}{50a^2+38b^2}$.

3) $\left[\frac{5a^2-2a}{5}-\frac{39ax-60b}{15x}-\frac{12b}{3x}\right]\cdot\frac{5}{a-3}$.

4) $\left[\left(a-\frac{bxy-ax}{y-x}\right)\cdot\frac{y-x}{y}+bx\right]\cdot\frac{z}{a}$.

5) $\left[\frac{x-2}{4x+8}-\frac{x-3}{3x+6}+\frac{x-4}{12x}\right]\cdot\left[\frac{7x-4}{20}-\frac{3x-7{,}5}{15}\right]$.

6) $\left[\frac{85b^2-102bc}{25b^2-36c^2}-\frac{25b^2+60bc+36c^2}{20b^2-11bc-42c^2}\right.$

$\left.+\frac{75b^4-90b^3c+108b^2c^2}{375b^4+648bc^3}\right]\cdot\frac{60bc-105c^2}{235b^2-930bc-180c^2}$.

b) Der zu reducierende Ausdruck ist ein Quotient mit zusammengesetztem Dividend und Divisor.

1) $\left(\frac{a-x}{b}-\frac{b-x}{a}\right):\left(1-\frac{b}{a}\right)$.

2) $\left(\frac{3}{a+b}-\frac{2}{a-b}\right):\left(\frac{3}{a-b}-\frac{2}{a+b}\right)$.

3) $\left(\frac{5a}{2x-3a}-\frac{2x+3a}{7a}\right):\frac{484a^4-4x^4}{42x^4-63ax^3}$.

4) $\left[\frac{21ax+15bx}{147a^2x-210abx+75b^2x}+\frac{5y}{35ay-25by}\right.$

$\left.-\frac{56az}{392a^2z-200b^2z}\right]:\frac{49a^2+210ab+225b^2}{49a^2-25b^2}$.

---

*) Die folgenden Aufgaben eignen sich namentlich zu Wiederholungen des Pensums der Buchstabenrechnung (Lehrordnung S. 258).

5) $\left[\frac{4a}{9a^2 - 4b^2} - \frac{a}{9a^2 - 12ab + 4b^2}\right] : \left[\frac{12a^2 - 16ab}{27a^3 - 8b^3} + \frac{2a}{9a^2 + 6ab + 4b^2}\right].$

6) $\left[\frac{15ax - 18ay}{10ax - 12ay - 15bx + 18by} + \frac{4a^2 - 9b^2}{4a^2 + 12ab + 9b^2} - \frac{8a^2b - 12ab^2 + 18b^3}{8a^3 + 27b^3} + \frac{20a^4 + 25a^2b^2}{16a^4 - 16a^2b^2 - 45b^4}\right] : \frac{105a^3 - 49a^2b + 105ab^2}{2a + 3b}.$

c) Die zu reducierenden Ausdrücke sind algebraische Summen, deren Glieder Produkte oder Quotienten sind.

1) $\frac{4x^2 - 9y^2}{3zt} \cdot \frac{5z}{2x - 3y} + \frac{2x - 3y}{2z + 3t} : \frac{4x^2 - 9y^2}{4z^2 - 9t^2}.$

2) $\frac{16a^2 - 40ab + 25b^2}{7xz} : \frac{16a^2 - 25b^2}{21xzt} - \frac{8a^3 - 27b^3}{2a - 3b} \cdot \frac{6t}{12a^2 + 18ab + 27b^2}.$

3) $\frac{343x^3 - 512y^3}{49x^2 - 64y^2} : \frac{147x^4 + 168x^3y + 192x^2y^2}{49x^2 + 112xy + 64y^2} - \frac{15x^2 + 2xy - 24y^2}{27x^3 - 64y^3} \cdot \frac{45x^2 + 60xy + 80y^2}{10x^2 - 12xy}.$

d) In den zu reducierenden Ausdrücken treten die beiden ersten Fälle in gegenseitiger Verbindung auf.

1) $\left(\frac{3x^2 + 4yz}{8x^2} - \frac{2z + 7y}{12z} + \frac{35x^2y - 24yz^2}{48x^2z}\right) \cdot \left(3 - \frac{5y}{6z}\right) : \frac{180z^2 + 76yz - 35y^2}{96y}.$

2) $\left[\frac{16a^2m + 48abm + 36b^2m}{a^3b - a^2b^2} \cdot \frac{a^2b}{2am - 12bm}\right] : \left[\frac{2a^2b + 3ab^2}{a^2b - 36b^3} \cdot \frac{ab + 6b^2}{a^2b - ab^2}\right].$

3) $\left[\left(\frac{175m^2x - 280mx^2 + 112x^3}{648m^4 - 375mx^3} \cdot \frac{108m^3 + 90m^2x + 75mx^2}{175m^2x - 112x^3}\right) - \frac{5mx - 4x^2}{150m^2x - 5mx^2 - 100x^3}\right] : \frac{10mx - 8x^2}{90m^3 - 3m^2x - 60mx^2}.$

e) In den zu reducierenden Ausdrücken kommen Doppelbrüche vor

1) $\frac{x - \frac{y^2}{x}}{1 + \frac{y}{x}}.$ 2) $\frac{\frac{a^2 - b^2}{a}}{1 - \frac{b}{a}}.$

3) $\dfrac{\dfrac{a^3m^2 + c}{a^2m^2} - a}{\dfrac{cm^2 + c}{m^2} - c}$. 4) $\dfrac{a - b + \dfrac{2ab}{a - b}}{a + b - \dfrac{2ab}{a + b}}$.

5) $\dfrac{\dfrac{x - y}{x^2 + xy} - \dfrac{x}{y^2 + xy}}{\dfrac{1}{x + y} + \dfrac{y^2}{x^3 - xy^2}}$. 6) $\dfrac{\dfrac{3}{x + y} - \dfrac{2}{x - y}}{\dfrac{3}{x - y} - \dfrac{2}{x + y}}$.

7) $\left(\dfrac{\dfrac{49x^2-9}{3}}{\dfrac{7x + 3}{3}} + \dfrac{\dfrac{8 - 27x^3}{4}}{\dfrac{4 + 6x + 9x^2}{4}} - \dfrac{\dfrac{49 - 900x^2}{700}}{\dfrac{7 + 30x}{70}} + \dfrac{\dfrac{7a^2 - 7x^2}{2}}{5a^2 - 5x^2}\right)$

$: \dfrac{49x^2 - 1}{35}$.

§ 30. Ausdrücke mit Wurzelgrößen.

1) $\sqrt{\dfrac{2x + y}{x^2y} + \dfrac{1}{y^2}}$. 2) $\dfrac{5g\sqrt{a^2 - b^2}}{g\sqrt{a + b}}$.

3) $\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b}$. 4) $\dfrac{\sqrt{x^4 - y^4}}{x + y}$.

5) $\dfrac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt[3]{x - y}}$. 6) $\dfrac{\sqrt[3]{a^3 + b^3}}{\sqrt[3]{a^2 + 2ab + b^2}}$.

7) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2 - 16y^2}}{\sqrt[5]{x^2 - 8xy + 16y^2}}$. 8) $\dfrac{\sqrt{4a^2 - 9x^2}}{\sqrt[3]{4a^2 + 12ax + 9x^2}}$.

9) $a\sqrt{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3} + b^2\sqrt{a - b} + \sqrt{a^3b^2 - a^2b^3}$.

10) $(x + 3a)\sqrt{49x^4 + 147ax^3 + 441a^2x^2} - 7\sqrt{72a^3x^3}$
$- 7x\sqrt{(x^3 - 27a^3)(x - 3a)}$.

11) $4a\sqrt{169a^2b + 26ab^2 + b^3} - 6b\sqrt{16a^2b + 8ab^2 + b^3}$
$+ 5a\sqrt{16b^3 - 72ab^2 + 81a^2b}$.

12) $\dfrac{16a^2b - 9b^3}{64a^4 - 49a^2b^2} \cdot \sqrt[3]{64a^3 - 112a^2b + 49ab^2}$
$\cdot \dfrac{8a^2 + 7ab}{16a^2b - 24ab^2 + 9b^3}\sqrt[3]{72a^4 - 63a^3b}$.

Fünfter Abschnitt.

Gleichungen.

A. Gleichungen des ersten Grades.

I. Mit einer Unbekannten.

§ 31. Auflösung gegebener Gleichungen.

I. Gleichungen mit bestimmten Zahlen.

a) Zur Einübung der Regeln über das Transponieren, die Ausscheidung des gemeinsamen Faktors x und die Division durch den Koefficienten von x.

Mündlich.

1) $x + 18 = 72.$
2) $354 + x = 745.$
3) $x + 24\frac{2}{5} = 65\frac{2}{3}.$
4) $x + 65{,}3 = 117{,}2.$
5) $x + 51 = 0$
6) $x + 29 = 15.$
7) $x - 35 = 46.$
8) $x - 99 = 240.$
9) $x - 37\frac{3}{8} = 53\frac{3}{4}.$
10) $x - 92{,}8 = 87{,}92.$
11) $x - 3{,}754 = 0.$
12) $x - 28{,}2 = -23{,}5.$
13) $12 - x = 5.$
14) $5\frac{5}{8} - x = 3\frac{1}{4}.$
15) $14{,}7 - x = 11{,}9.$
16) $9 - x = 21.$
17) $18{,}5 = 7{,}32 - x.$
18) $143 - x = -231.$
19) $5x = 95.$
20) $135 = 4x.$
21) $23x = 4\frac{3}{5}.$
22) $0{,}35x = 2{,}45.$
23) $6x + 16 = 40.$
24) $53 = 13 + 8x.$
25) $5x - 21 = 34.$
26) $24x + 11\frac{1}{4} = 83\frac{1}{4}.$
27) $20 - 3x = -4.$
28) $11x - 13 = 42.$
29) $5x + 11x = 48.$
30) $4x + 7x + 3x = 119.$
31) $5\frac{1}{8}x + 3\frac{3}{4}x + 7\frac{1}{8}x = 128.$
32) $3{,}3x + 4{,}1x + 7{,}6x = 150.$
33) $12x - 7x = 95.$
34) $24x - 30x + 9x = 72.$
35) $3x + 9 = 2x + 14.$
36) $8x - 6 = 6x + 6.$

37) $8x + 6 = 33 - x.$ **38)** $3x + 4 - x + 4x = 40.$
39) $3x + 7 = 2x + 41.$ **40)** $3x + 22 - 6x - 4 = 0.$
41) $4x + 5 + 2x = 60 - 6x - 1.$
42) $8x + 4 + 3x - 2 = 8x + 8.$
43) $120 - 2x - 8x + 15 = 40 - 6x + 15 + 4x.$
44) $300 - 8x - 12x = 24x + 25 - 4x + 25.$
45) $800 - 3x - 10x + 40 - 3x = 20x + 200 + 6x + 10.$
46) $24 + 12x + 36x + 12 - 100x + 4x = 0.$
47) $3{,}5x - 1{,}8x + 5\frac{4}{5}x - 142 = 2x + 188.$
48) $2{,}5x - 1{,}2x + 4\frac{1}{2}x = 200 - \frac{13}{15}x.$

Schriftlich.

1) $x + 2{,}342 = 0{,}245.$ **2)** $x + 14{,}68325 = -2{,}000802.$
3) $x - 6{,}578 = 4{,}32.$ **4)** $x - 44{,}054 = -0{,}005.$
5) $5{,}75x - 124 + 2x = 5{,}125x - 61.$

b) Zur Einübung derselben Regeln, sowie der Sätze über die Auflösung von Klammern.

Mündlich.

1) $20 + (7 + x) = 35.$ **2)** $40 - (12 + x) = 19.$
3) $15 - (13 - x) = 12.$ **4)** $5x - (48 - x) = 24.$
5) $5(4x + 10) = 150.$ **6)** $2(2(3x + 4)) = 160.$
7) $5x + (4x - 15) = 147.$ **8)** $6x - (2x + 34) = 46.$

Schriftlich.

1) $4x - (5 - 2x) = 5x - 3.$
2) $20x - (30x - 15) + 8x = 100 - (17x + 10).$
3) $400 - (8x - 11x + 2) + 2 = 500 - (5x + 6x - 10) + 30.$
4) $5x - 40 = 10x - [80 - (10 + 3x)] - 130.$
5) $200 - [20x - (4x - 5)] = 40x - [100 - (5 + 4x)] - 10.$
6) $8x - [5 - 4x + (8 - 2x) + 11 - x] = 10x + 26.$
7) $100x - [4 - (5x + 4 - 10x) + 75x] = 12.$
8) $12x - [80 - (2x - (4 + x) - 5) + 23] = 44.$
9) $900 - [10x - (40 + [-2x - (x + 12) + 65] - 3x) - 5] - 14 = 20x + 120.$
10) $5{,}2x - [0{,}8x - (0{,}3x - (0{,}9 + \frac{3}{4}x) - \frac{3}{8}x) - 0{,}2x] = 59{,}5.$
11) $12x - (8x - (0{,}4 + 0{,}6x) - 3{,}1x) - 6{,}56 = 0.$
12) $21 + x = (x + 9)2.$
13) $20 - (x - 2) = (2x + 1)2.$

14) $6x + 10(x - 7) = 8x + 10.$

15) $5(x - 4) + 24 = 50 - 5(x - 2) + 4.$

16) $18 - (1 + 4x)4 + 8x = 16x - 4.$

17) $100 - 3(30 - x) = 2(2x + 1) - 1.$

18) $30 - 3(15 - 2x) + 4x = 10x - 10(20 - 6x) + 5.$

19) $-(30 + 3x) + (2x + 20)3 - 5 = 2(4x + 20) + 10.$

20) $40 + 6(15 - (30 - 4x)) + x = 16x - (x + 3)2.$

21) $360 + 2(5 - 8(30 - 2x)) = 15x - (4 + 2x)2 + 24.$

22) $(x + 2)(4 - x) = (5 - x)(4 + x) - 9.$

23) $(2x + 4)(16 - 2x) - 3(x + 3) = (12 - 2x)(5 + 2x) + 5(2x + 2) - 30.$

24) $(11 - 3x)^2 + (15 - 4x)^2 = (20 - 5x)^2 - 12.$

25) $[6x - 3(8 + 3x - (12 - 2x))]2 = -14x + 4.$

26) $10{,}643625 - (2x - 2{,}345) \cdot \frac{7}{8} = 133{,}823 - (8x + 0{,}75) \cdot 4\frac{1}{2} + 0{,}41.$

c) Zur Einübung der Regel über die Wegschaffung der Brüche, sowie der vorhergehenden Regeln, mit Ausnahme der Regeln über die Auflösung von Klammern.

Mündlich.

1) $\frac{x}{9} = 7.$

2) $\frac{x}{9\frac{3}{4}} = 12.$

3) $\frac{x}{3\frac{1}{5}} = 4\frac{1}{2}.$

4) $\frac{x}{10{,}6} = 9.$

5) $\frac{1}{13}x = 15.$

6) $\frac{1}{24}x = 32.$

7) $\frac{x}{12} = \frac{5}{24}.$

8) $\frac{1}{15}x = \frac{11}{15}.$

9) $\frac{x}{5} + 4 = 8.$

10) $\frac{x}{6} + 8\frac{2}{3} = 10.$

11) $\frac{x}{11} - 8 = 13.$

12) $\frac{x}{24} - 16\frac{5}{8} = 31\frac{3}{8}.$

13) $\frac{18}{x} = 3.$

14) $\frac{135}{x} = 9.$

15) $\frac{72}{x} + 18 = 42.$

16) $\frac{42\frac{3}{4}}{x} + 45 = 54.$

17) $\frac{43{,}75}{x} - 2 = 3.$

18) $\frac{92{,}5}{x} - 3{,}25 = 6.$

19) $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x - \frac{17}{24}x = 145.$

20) $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}x + \frac{1}{5}x = 148.$

21) $\frac{3}{4}x - \frac{4}{5}x + \frac{2}{3}x - \frac{7}{8}x + 100 = \frac{x}{24} - 8.$

Schriftlich.

1) $\frac{x}{321} - 4 = 29.$ 2) $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 95.$

3) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + 50 = 100.$

4) $\frac{x}{2} + 3 + \frac{x}{5} - 2 = 57.$

5) $\frac{2x}{3} + 3\frac{3}{4} + \frac{3x}{4} - \frac{3x}{5} = \frac{3x}{2} - 6\frac{1}{2}.$

6) $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}x + 7\frac{3}{7} + \frac{1}{6}x = \frac{3}{5}x - 10\frac{4}{7}.$

7) $5\frac{2}{3}x + 6\frac{1}{2} - 3x - \frac{5}{2}x = 5\frac{1}{6}.$

8) $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x - 30 = 25 - \frac{7}{12}x.$

9) $100 = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x - \frac{5}{6}x + \frac{1}{4}x.$

10) $3\frac{3}{8}x + 60\frac{1}{2} - \frac{7}{16}x + 50\frac{3}{4} = \frac{11}{24}x + \frac{17}{72}x - 5.$

11) $\frac{4}{x} + 2 - \frac{6}{x} = \frac{2}{x}.$

12) $4 - \frac{10}{3x} + 4\frac{2}{3} + \frac{5}{6x} = 8 - \frac{8}{9x} + 3\frac{4}{9} - \frac{35}{18x} - 2\frac{11}{18}.$

d) Zur Einübung aller Regeln, namentlich aber derjenigen über die Wegschaffung der Brüche und die Auflösung der Klammern, in Verbindung miteinander.

Mündlich.

1) $\frac{5x + 9}{8} = \frac{3x - 1}{4}.$ 2) $\frac{3x - 2}{4} = \frac{x + 2}{2}.$

3) $\frac{3x - 4}{5} = \frac{x + 4}{3}.$ 4) $4x - \frac{x + 10}{5} = \frac{7x + 2}{2}.$

Schriftlich.

1) $\frac{31 + x}{5 + x} = 3.$ 2) $\frac{x + 3}{27 + x} = \frac{1}{3}.$

3) $\frac{3x + 2}{2x + 2} = \frac{7}{5}.$ 4) $\frac{4x - 2}{5x - 4} = \frac{6}{7}.$

5) $50 - 5x = \frac{7x - 2}{2}.$ 6) $\frac{5x + 6}{6} = x - \frac{1}{3}.$

7) $2x - \frac{2}{3} = \frac{21x + 5\frac{1}{2}}{12}.$

8) $x + \frac{3x - 3}{4} = 5 + \frac{3x}{5}.$

9) $\frac{50 - 4x}{5} = \frac{2x + 6}{13}.$

10) $\frac{3x + 1}{7} = \frac{-27 + 7x}{9}$.

11) $\frac{x + 18}{8} = \frac{61 - 23x}{6}$.

12) $\frac{2\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2}}{9} = \frac{3\frac{3}{5}x + 6}{12}$.

13) $\frac{19 - x}{3} + 3x = \frac{41 - x}{2} - 11$.

14) $3x + \frac{7x + 3}{3} = 13\frac{1}{2} + \frac{10x - 21}{2}$.

15) $9 - \frac{2 + 3x}{7} = 11 - \frac{20 - 3x}{2}$.

16) $\frac{5 - x}{9} - \frac{10 - 3x}{3} = -\frac{1}{9}$.

17) $\frac{x - 1}{2} - \frac{x + 1}{9} = 11 - \frac{2x + 1}{7}$.

18) $\frac{7x + 3}{2} - \frac{9x - 11}{5} + \frac{4x - 11}{15} = 50 - \frac{13x - 65}{6}$.

19) $\frac{5x - 4}{15} - \frac{4x - 7}{30} = \frac{8x + 5}{20} - \frac{7x - 6}{40} - \frac{11}{15}$.

20) $\frac{3x + 3}{5} + \frac{5x + 4}{6} - \frac{x - 2}{2} = \frac{7x + 2}{15} + 4$.

21) $60 - \frac{2x + 5}{3} - \frac{x - 5}{5} - \frac{x + 1}{7} = \frac{3x - 4}{2} + 11$.

22) $80 - \frac{3x + 1}{11} - \frac{4x - 2}{5} - \frac{2x + 3}{3}$
$= \frac{5x + 2}{2} + 2$.

23) $4 \cdot \frac{17 - 2x}{3} - \frac{3x - 7}{5} = 12 \cdot \frac{5 - x}{2} + 5$.

24) $5x - 2 \cdot \frac{8x - 9}{3} = 8 - 2 \cdot \frac{x - 2}{2}$.

25) $2x - 3(5 + \frac{3}{4}x) + \frac{2}{3}(4 - x) - \frac{1}{4}(3x - 16) = 0$.

26) $100 - \frac{3(3x + 1)}{4} - \frac{2(4x + 1)}{3} = 70 + \frac{5(x + 4)}{5}$
$- \frac{(2x - 1)4}{9} - 1$.

27) $\frac{0,9x - 6}{7} - 0,29(0,8x + 20) + \frac{0,65x + 5}{14} = - 0,12x.$

28) $\frac{x^4 - (16x^2 + 70x - 8)}{x^2 + 4x + 6} = x^2 - 4x - 6.$

29) $\frac{15}{x - 5} + \frac{9}{2x - 10} - \frac{77}{18} = \frac{20}{3x - 15}.$

30) $\frac{32}{6x - 9} + \frac{33}{8x + 12} = \frac{109x + 356\frac{11}{12}}{20x^2 - 45}.$

31) $\frac{x + 5}{9x - 15} - \frac{4x + 5}{27x + 45} = \frac{15x - 1\frac{1}{3}x^2 + 183\frac{1}{3}}{36x^2 - 100}.$

32) $10,6 - (16,5 - 2,5x) \cdot \frac{2}{5} = 99,32 - (0,65 + 5x) \cdot 3\frac{1}{5} - 1,44.$

33) $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{5} + x} - \frac{3}{5} = \frac{7}{10} - \frac{\frac{3}{5}x + \frac{3}{5}}{\frac{3}{5} + x}.$

II. Gleichungen mit allgemeinen Zahlen.

a) Man vergleiche a) unter I dieses Paragraphen.

Mündlich.

1) $x + a = b.$
2) $a + x - b = c.$
3) $a - x = b.$
4) $a - x - b = c.$
5) $ax = b.$
6) $ax - b = c.$
7) $a - bx = c.$
8) $ax + b = c.$
9) $ax + b + x = c.$
10) $ax + b = x + d.$
11) $ax - b = a - bx.$
12) $ax - 1 = a - x.$
13) $3x - 7a + 8b = 5a - x.$

Schriftlich.

1) $7x - 5a - 2c = 4x - 8a + 11b.$
2) $5ab - 3ax + c = - 4ax - 8ab - 2c.$
3) $4a - 3bx + 2cd = 3a + 5bx - 7cd.$
4) $ax - 3b + 2cx = dx + g.$
5) $4a^2 + 3bx = 11a^2 - 5cx.$
6) $7ax + 5b^2 - 7cx = 5ax + 7b^2.$
7) $4ab - 7cx + 11dx = 5bd - 10cx.$
8) $a^2 - bx - dx = 2bx + 8a^2 - 5g^2.$

b) Man vergleiche b) unter I dieses Paragraphen.

Schriftlich.

1) $a - (b + c)x = d - bx.$
2) $bx + c(x + m) = f + g.$

3) $-a + bx - (x - c)b = c(b - x)$.
4) $a(b - x) - c = d(f + x) + g$.
5) $a(b - cx) - d(f + g) = 3c(f - ax) + 4h$.
6) $6ax = 4ab - 5b(x - 7b)$.
7) $3bx - 7b(x - 5c) + 7b(6c - 5x) - 10cx$.
8) $(2a + 3b) \cdot (x + 4a) - 10ab = 12ax - (3a - 2b) \cdot (5x - b)$.
9) $12a^3 - (a + b)^2x = 7a(3a^2 - 2b^3 - 5bx)$.
10) $(2b + a)^2x - 4(3a - b)(2a - 3b)x = 4a^2b + 5b^2x$.
11) $(m - x)(x - n) - p + qx = (x - r)(s - x) + t$.

c) Man vergleiche c) unter I dieses Paragraphen.

Mündlich.

1) $\frac{x}{a} = b$. 2) $\frac{ax}{b} = c$.
3) $\frac{b}{x} = c$. 4) $\frac{ax}{b} + c = d$.
5) $\frac{ax}{b} - c = d$. 6) $a - \frac{bc}{x} = d$.

Schriftlich.

1) $x = a - \frac{bx}{c}$. 2) $\frac{a}{x} - b = \frac{c}{x} + d$.
3) $\frac{ax}{b} + \frac{cx}{d} = f + x$.
4) $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)x = 1$.
5) $\frac{x}{b} - c + \frac{dx}{be} = f$.
6) $x = a + \frac{bc}{d} + \frac{afx}{bc}$.
7) $\frac{x}{a} - 1 - \frac{dx}{c} = -3ab$.

d) Man vergleiche d) unter I dieses Paragraphen.

Schriftlich.

1) $\frac{x}{a + x} = \frac{b}{c}$. 2) $\frac{x}{a - x} = \frac{b}{c}$.

3) $\frac{b}{c} = \frac{a + x}{b + x}$. 4) $\frac{a - b}{b - x} = \frac{c}{x}$.

5) $\frac{a - x}{b - x} = \frac{f}{g}$. 6) $\frac{5ax}{a - b} - 3a = 10x$.

7) $\frac{4x}{2a + 3b} - 5 = \frac{7b}{5a}$. 8) $\frac{a}{b + x} = \frac{c}{d - x}$.

9) $\frac{a}{m + x} = \frac{b}{x - m}$.

10) $\frac{2a + 3b}{a + x} = \frac{6a - 5b}{x - a}$.

11) $\frac{x}{m - n} - \frac{5m}{m + n} = \frac{2nx}{m^2 - n^2}$.

12) $\frac{(a - b)x}{a + b} + \frac{(a + b)x}{a - b} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$.

III. Gleichungen mit Wurzelausdrücken.

a) Die Gleichungen enthalten nur eine Wurzel mit der Unbekannten x im Radikanden.

Mündlich.

1) $\sqrt{x} = 5$. 2) $\sqrt{x} = 13$. 3) $\sqrt{x} = 19$.

4) $\sqrt{x} = 2{,}5$. 5) $\sqrt{x} = 3{,}4$. 6) $\sqrt{x} = 7\frac{1}{2}$.

7) $3\sqrt{x} = 36$. 8) $7\frac{1}{2}\sqrt{x} = 60$. 9) $\frac{1}{6}\sqrt{x} = 10$.

10) $\frac{4}{5}\sqrt{x} = 72$. 11) $30 + \sqrt{x} = 36$. 12) $170 - \sqrt{x} = 157$.

13) $\sqrt{11 + x} = 13$. 14) $\sqrt{x + 6} = 16$.

15) $\sqrt{6x - 14} = 4$. 16) $\sqrt{8x - 7} = 7$.

17) $7 = 4\sqrt{x} - 5$. 18) $\sqrt{x} - a = b$.

19) $\sqrt[n]{ax + b} = c$. 20) $(m - n)\sqrt{x} - m = n$.

Schriftlich.

1) $\sqrt{25x^2 + 31} - 1 = 5x$.

2) $5x - 2\sqrt{16x^2 - 15x - 18} = 8 - 3x$.

3) $4x - \sqrt{16x^2 - 85x - 41} = 19$.

4) $12x - 3\sqrt{25x^2 - 20x - 65} = 15 - 3x$.

b) Die Gleichungen enthalten zwei, drei oder vier Wurzeln mit der Unbekannten x im Radikanden.

Mündlich.

1) $\sqrt{2x+9} = \sqrt{3x+1}$. 2) $\sqrt{3x+9} = \sqrt{2x+18}$.

3) $\sqrt{3x+1} = \sqrt{2x+17}$.

Schriftlich.

1) $\sqrt{40+x} = 4 + \sqrt{x}$.

2) $\sqrt{x-12} = 6 - \sqrt{x}$.

3) $\sqrt{x-6} + \sqrt{x+5} = 11$.

4) $\sqrt{x+5} + \sqrt{x+14} = 9$.

5) $3\sqrt{x+3} = 5\sqrt{x-9} + 2\sqrt{x-12}$.

6) $\sqrt{x-2} - \sqrt{x-10} = \sqrt{x+5} - \sqrt{x-7}$.

7) $\sqrt{x+5} + \sqrt{x-2} = \sqrt{3x+16}$.

8) $\sqrt{x-1} - \sqrt{x-8} = \sqrt{x+19} - \sqrt{x+8}$.

c) Die Unbekannte x kommt in Wurzelausdrücken vor, die eine wiederholte Radizierung andeuten.

Schriftlich.

1) $5\sqrt{7+\sqrt{x}} = 3\sqrt{27-\sqrt{x}}$.

2) $5x + 1 = 4(2+x) + \sqrt{49 - x\sqrt{x^2-56}}$.

3) $\sqrt{6x + 4 + \sqrt{x^4 + 10x^2 + 3x + 10}} = x + 3$.

4) $7\sqrt{32+\sqrt{2x}} = 6\sqrt{53-\sqrt{2x}}$.

5) $\sqrt[3]{36 + 4\sqrt{3x+13}} - 1 = 3$.

d) Die Unbekannte x kommt entweder in der gleichen oder in verschiedener Form im Radikanden mehrerer Wurzeln vor.

Schriftlich.

1) $(4\sqrt{x} + 3)(4\sqrt{x} - 3) = 7$.

2) $\frac{7x+5}{\sqrt{x}} = 7\frac{1}{5}\sqrt{x}$. 3) $\frac{1}{3}\sqrt{3x} - 1 = \frac{1}{2}\sqrt{3x} - 2$.

4) $(\sqrt{4x} - 5)(\sqrt{x} + 6) = (7 + 2\sqrt{x})(\sqrt{x} - 2)$.

5) $\frac{\sqrt{x}+18}{\sqrt{x}+8} = \frac{\sqrt{x}+10}{\sqrt{x}+4}$.

6) $\frac{\sqrt{x} + 19}{\sqrt{x} + 8} = \frac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} + 1}$.

7) $\frac{\sqrt{4x} + 5}{\sqrt{x} + 1} = \frac{17 + \sqrt{4x}}{\sqrt{x} + 5}$.

8) $\frac{6\sqrt[3]{x + 24} + 7}{2\sqrt[3]{x + 24} - 1} = 5$.

9) $\frac{20\sqrt[7]{x + 118} + 5}{3 + 6\sqrt[7]{x + 118}} = 3$.

10) $\sqrt{x} + \sqrt{5 + x} = \frac{15}{\sqrt{5 + x}}$.

IV. Einige besondere Fälle, die bei der Auflösung von Gleichungen zu beachten sind.

a) Die Unbekannte x kommt entweder in der 1. oder in einer höheren Potenz als Faktor einer Gleichung vor (oder in einer algebraischen Summe, die ein Faktor der Gleichung ist).

1) $4x^2 + 3x = 31x$. **2)** $4x - 7x^2 = 8x - 25x$.

3) $35x + 9x^2 = 5x^2 + 67x$.

4) $(x + 2)^3 + 28 - (x - 1)^3 = (x + 4)^3 - (x + 3)^3$.

b) Die eine Seite einer Gleichung ist ein Produkt und die andere Seite ist = 0.

1) $(5x - 30)(m + n) = 0$. **2)** $(x - 30) \cdot 25\frac{1}{2} = 0$.

c) In den Gleichungen kommen Klammern vor, die vorteilhaft auf eine andere als die gewöhnliche Weise aufgelöst werden.

1) $\frac{1}{3}(\frac{1}{5}(\frac{1}{2}x - 1) - 1) - 1 = 1$.

2) $\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}] - \frac{1}{2} = 4\frac{5}{8}$.

3) $\frac{7}{10}[\frac{4}{5}(\frac{9}{10}(\frac{7}{8}x - 1500) - 300) - 880] - 1320 = 23600$.

d) In der Gleichung kommen Brüche mit gleichen Nennern vor (sind dieselben nicht gleich, so können sie leicht gleich gemacht werden).

1) $\frac{3x}{4} + 6 - \frac{x - 3}{7} = \frac{5x - 12}{4} - \frac{2x + 1}{7} + 1$.

2) $\frac{5x - 12}{12} + \frac{8x + 2}{14} = \frac{9x - 10}{7} - \frac{x + 6}{6}$.

3) $\frac{x - 3}{x - 5} - \frac{x - 6}{x - 7} - \frac{x - 13}{x - 5} = \frac{x - 1}{x - 3} - \frac{x - 9}{x - 7} - \frac{x - 8}{x - 3}$.

Anhang.

Die geometrischen Proportionen in allgemeiner Begründung.

Mündlich.

1) Man bilde aus folgenden Verhältnissen Proportionen *): 3 : 15; 12 : 15; 6 : 30; 28 : 35; 8 : $12\frac{4}{5}$; 15 : 24!

2) Sind folgende Proportionen oder Verhältnisgleichungen richtig:

1) $24 : 44 = 72 : 132$;

2) $73 : 99 = 113 : 149$;

3) $(a^2 - b^2) : (a + b)^2 = (a - b)^2 : (a^2 - b^2)$;

4) $\frac{9a^2 - 25b^2}{9a^2 + 30ab + 25b^2} = \frac{9a^2 - 30ab + 25b^2}{4a^2 - 25b^2}$.

3) Welchen Wert hat x in folgenden Proportionen:

1) $5 : 11 = 19 : x$; 2) $12 : 39 = x : 78$;

3) $x : 36 = 48 : 72$; 4) $35 : x = 45 : 54$;

5) $ab : a = x : c$; 6) $13(a + b) : x = 117(a^2 - b^2) : 9(a - b)$;

7) $(m^2 - n^2) : (m - n)^2 = (m + n)^2 : x$.

4) Man bilde aus folgenden gleichen Produkten Proportionen:

1) $15 \cdot 42$ und $18 \cdot 35$; 2) $21 \cdot 46$ und $23 \cdot 42$;

3) ab und cd; 4) mr und np.

---

*) In Bezug auf die äußere Form einer Proportion merke man, daß die gleichen Verhältnisse entweder in Quotientenform, wie $a : b = c : d$ oder in Bruchform, wie $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ geschrieben und so gelesen werden: „a verhält sich zu b, wie c zu d", oder kürzer: „a zu b wie c zu d". Es ist also a der Dividend ꝛc. Manche sehen die Proportion $a : b = c : d$ an als $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

5) Aus den Zahlen 5, 12, 4 und 15 sind acht verschiedene Proportionen zu bilden!

6) Man bilde aus der Gleichung ad = bc acht Proportionen!

7) Suche die vierte Proportionale zu: 1) 3, 8, 9; 2) $5\frac{1}{3}$, 16, $4\frac{1}{2}$!

8) Welches ist die mittlere Proportionale zwischen: 1) 3 und 12; 2) 2 und 32; 3) 8 und 18; 4) $21\frac{3}{5}$ und $1\frac{2}{3}$; 5) a und c *).

---

*) Unter der mittleren geometrischen Proportionale oder dem geometrischen Mittel zweier Zahlen versteht man also diejenige Zahl, deren Quadrat dem Produkte jener zwei Zahlen gleich ist; in Zeichen:

$$a : x = x : c$$

$$x = \sqrt{ac}.$$

Die mittlere arithmetische Proportionale oder das arithmetische Mittel zweier Zahlen dagegen ist diejenige Zahl, welche der halben Summe dieser beiden Zahlen gleich ist; in Zeichen:

$$a - x = x - c$$

$$x = \frac{a + c}{2}.$$

Verhält sich von drei ungleichen Zahlen $a > x > c$ (5, $3\frac{3}{4}$, 3) die größte zur kleinsten, wie der Unterschied zwischen der größten und mittleren zur Differenz zwischen der mittleren und kleinsten, so stehen sie in harmonischer Proportion; in Zeichen:

$$(a - x) : (x - c) = a : c.$$

Hieraus ist
$$x = \frac{2ac}{a + c}$$
die mittlere harmonische Proportionale oder das harmonische Mittel von a und c.

Der reciproke Wert des harmonischen Mittels zweier Zahlen a und c ist das arithmetische Mittel der reciproken Werte der Zahlen, in Zeichen:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{c},$$

eine Gleichung, die sich aus $x = \frac{2ac}{a + c}$ ableiten läßt. Man untersuche die Richtigkeit auch des folgenden Satzes: Das geometrische Mittel zweier Zahlen a und c ist das geometrische Mittel aus dem arithmetischen und dem harmonischen Mittel der Zahlen, in Zeichen:

$$\frac{a + c}{2} : \sqrt{ac} = \sqrt{ac} : \frac{2ac}{a + c}.$$

9) Welches ist die dritte Proportionale zu: 1) 6 und 12; 2) 8 und 24; 3) $12\frac{1}{4}$ und 7; 4) $3\frac{1}{5}$ und 10?

10) Das 5fache einer Zahl verhält sich zu 25 wie 5 : 8; welche Zahl ist es?

11) Das 12fache einer Zahl verhält sich zu $6\frac{2}{9}$ wie 3 : 2. Welches ist diese Zahl?

12) Was kostet ein Diamant von 2,4 g, wenn ein 1,2 g schwerer Diamant von gleicher Güte und Form 245 ℳ kostet und die Preise der Diamanten im quadratischen Verhältnisse ihrer Gewichte stehen?

13) Die Zahl 2185 soll in 5 Teile so zerlegt werden, daß sich die Teile umgekehrt wie $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4} : \frac{4}{5} : \frac{5}{6}$ verhalten. Wie groß ist jeder Teil?

14) Welche Proportion läßt sich durch Addition oder Subtraktion von Gliedern ableiten aus: $(2m + 5n) : (2m - 5n) = (9p - q) : (9q - p)$.

15) Welche einzelnen Proportionen lassen sich aus der fortlaufenden $7 : 9 : 11 = 14 : 18 : 22$ bilden? Wie werden diese wieder in eine fortlaufende Proportion verwandelt?

16) $m : n = 4 : 5$, $M : N = 5 : 6$; man berechne $mM : nN$!

17) Es sei $A : B = 2 : 3$, $B : C = 4 : 5$, $C : D = 6 : 7$; man berechne $A : C$, $A : D$ und $B : D$.

18) Aus $m : n : p = 7 : 6 : 2$ berechne man $(m + n + p) : m$.

19) Aus $x : y : z = 3 : 4 : 5$ und $x + y + z = 60$ berechne man die Unbekannten.

20) Ebenso aus $x : y : z = 7 : 4 : 3$ und $2x - 3y + 4z = 98$.

21) Was heißt es: Größen sind einander gerade oder direkt proportioniert (stehen im geraden oder direkten Verhältnis) und: sie sind umgekehrt oder indirekt proportioniert (sie stehen im umgekehrten oder indirekten Verhältnis) *)?

---

*) Zwei Arten von Größen (Zeit-, Kraft-, Raum-, Massengrößen) sind miteinander gerade proportioniert, wenn sie in solcher Beziehung zu einander stehen, daß die Zu- oder Abnahme der einen Art eine Zu- oder Abnahme der anderen bewirkt (wenn bei Anwendung der Conjunktion „je —, desto —" auf beide Wörter eine Steigerung folgt: je größer die Masse, desto größer die Anziehung). In direktem Verhältnis stehen: die Peripherien zweier Kreise zu ihren Halb- oder Durchmessern, die Masse zweier Weltkörper und die Größe ihrer An-

22) Was heißt es: Größen stehen mit mehreren andern im zusammengesetzten, im quadratischen, im kubischen Verhältnis? *).

Schriftlich.

1) Man beweise folgende Sätze: 1) Eine Proportion bleibt richtig, wenn man alle Glieder mit derselben Zahl multipliciert

---

ziehung. — Zwei Arten von Größen sind einander umgekehrt proportional, wenn sie so voneinander abhängen, daß eine Zu- oder Abnahme der einen Art umgekehrt eine Ab- oder Zunahme der andern bewirkt (wenn bei Anwendung von „je —, desto —" auf beide Wörter wechselsweise eine Steigerung und Verminderung oder umgekehrt folgt: je größer der Druck auf ein Gas, desto kleiner sein Volumen). Im indirekten Verhältnis stehen also das Volumen zweier Gasarten zu dem darauf ausgeübten Druck

Es sei q die Einheit der Größen M und M_1, r die Einheit der Größen N und N_1 und

$$M = fq, \quad M_1 = f_1 q,$$
$$N = gr, \quad N_1 = g_1 r.$$

Ist nun $f : f_1 = g : g_1$

oder was dasselbe ist $f : g = f_1 : g_1$

also $M : M_1 = N : N_1$

oder $M : N = M_1 : N_1,$

so stehen die Größen M und M_1 im geraden Verhältnis zu den Größen N und N_1.

Wenn dagegen $f : f_1 = g_1 : g,$

also $M : M_1 = N_1 : N,$

so sind die Größen M und M_1 den Größen N und N_1 umgekehrt proportioniert. In diesem Fall kann man auch schreiben:

$$M : M_1 = \frac{1}{N} : \frac{1}{N_1}.$$ Warum?

*) Es seien die Größen m und n, p und q, r und s gegeben; sind nun die Größen M und N von diesen so abhängig, daß

$$M : N = mpr : nqs,$$

daß also ihr Verhältnis gleich dem Produkte der Verhältnisse je zweier der andern Größen ist, so stehen sie zu diesen Größen im zusammengesetzten Verhältnis.

Ist $M : N = m^2 : n^2$

oder $M : N = m^3 : n^3$

so stehen die Größen M und N mit den Größen m und n im geraden quadratischen, resp. kubischen Verhältnis. Beispiele: Die Inhalte zweier Rechtecker verhalten sich wie die Produkte ihrer drei Dimensionen zu einander; die Inhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate der Maßzahlen ihrer homologen Seiten; die Inhalte ähnlicher Körper wie die Kuben der homologen Kanten.

oder durch dieselbe Zahl dividiert (potenziert oder radiziert); die Glieder eines Verhältnisses mit derselben Zahl multipliciert, oder durch dieselbe Zahl dividiert; zwei homologe Glieder (1. und 3. und 2. und 4.) mit derselben Zahl multipliciert, oder durch dieselbe Zahl dividiert.

2) In jeder Proportion ist das Produkt der äußeren Glieder gleich dem Produkte der inneren Glieder. Wie erhält man hiernach ein äußeres, wie ein inneres Glied?

2) Verhält sich $a : b = c : d$, so hat man:

1) $(a + b) : b = (c + d) : d$
2) $(a + b) : a = (c + d) : c$
3) $(a - b) : b = (c - d) : d$
4) $(a - b) : a = (c - d) : c$
5) $(a + b) : (c + d) = a : c \; (= b : d)$.
6) $(a - b) : (c - d) = a : c \; (= b : d)$
7) $(a + b) : (c + d) = (a - b) : (c - d)$
8) $(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d)$.

Man drücke diese Sätze durch Worte aus und beweise sie, z. B. 1): In einer Proportion verhält sich die Summe der beiden ersten Glieder zum zweiten Gliede, wie die Summe der beiden letzten Glieder zum letzten Gliede; oder 8): In einer Proportion verhält sich die Summe des ersten und zweiten Gliedes zur Differenz derselben, wie die Summe des dritten und vierten Gliedes zur Differenz.

3) Verhält sich $a : b = c : d$, so hat man:

1) $(a + c) : (b + d) = a : b \; (= c : d)$
2) $(a - c) : (b - d) = a : b \; (= c : d)$.

Man drücke diese Sätze durch Worte aus und beweise sie, z. B. 1): In einer Proportion verhalten sich die Summen der homologen Glieder zu einander, wie die Glieder eines Verhältnisses.

4) Sind mehrere gleiche Verhältnisse, z. B. $a : b = c : d = e : f$ gegeben, so verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie irgend ein Vorderglied zu seinem Hinterglied, in Zeichen: $(a + c + e) : (b + d + f) = a : b \; (= c : d = e : f)$; beweise dies!

5) Man beweise folgenden Satz: Multipliciert man die gleichstelligen Glieder von zwei oder mehreren Proportionen miteinander, so erhält man eine richtige Proportion, in Zeichen: verhält sich $a : b = c : d$ und $m : n = p : r$, so verhält sich auch $am : bn = cp : dr$. Auf diese Weise entstehen zusammengesetzte Verhältnisse. Man erhält auch durch Division eine richtige Proportion. Beweis!

6) Folgende Proportionen:

$$a : b = g : h,$$
$$b : c = h : i,$$
$$c : d = i : k,$$
$$d : e = k : l,$$

in denen die Hinterglieder der Verhältnisse mit dem Vordergliede des folgenden Verhältnisses übereinstimmen, lassen sich in Form der einzigen Proportion: $a : b : c : d : e = g : h : i : k : l$ schreiben. Begründe die Richtigkeit dieser sog. fortlaufenden Proportion! Wie macht man aus einer solchen Proportion einzelne Proportionen?

7) Man ändere folgende Proportion in eine andere um, deren Glieder ganze Zahlen sind:

$$6\tfrac{7}{13} : 14\tfrac{4}{7} = 2\tfrac{4}{13} : 2\tfrac{1}{7}x.$$

8) Man bestimme x in folgenden Proportionen:

1) $(6 \cdot 9) : (11 \cdot 8) = x : (x + 374)$;

2) $(\tfrac{7}{3}x + 200) : (\tfrac{14}{3}x + 200) = 405 : 720$;

3) $4{,}2 : x = \left(\frac{1}{11\frac{7}{8}} \cdot \frac{1}{4\frac{4}{15}}\right) : \left(\frac{1}{8{,}4} \cdot \frac{1}{0{,}96}\right)$;

4) $8{,}2 : x = x : 73{,}8$;

5) $65{,}6 : x = x : 73{,}8$;

6) $x : 2959{,}2 = 27{,}4^2 : 109{,}6^2$;

7) $x : (m - 7) = (m^2 - 11m + 30) : (m^2 - 13m + 42)$

8) $x : 4 = (m^3 - n^3) : (m^2 + mn + n^2)2$.

9) Es soll aus der folgenden Proportion $(8x + 9y) : (8x - 9y) = (56m + 36z - 36u) : (56m - 36z + 36u)$ durch Addition und Subtraktion der Antecedenten und Consequenten eine einfachere Proportion hergeleitet werden!

10) In der Proportion $x : y = m : n$ sind die beiden letzten Glieder bekannt und außerdem die Summe s oder Differenz d der beiden ersten; man bestimme die beiden ersten Glieder!

11) Man zerlege die Zahl 3192 in zwei Summanden, die sich wie 3 : 4 zu einander verhalten.

12) Man bestimme x aus der Proportion: $x : (a - x) = p : q$.

13) Ebenso aus: $x : (c + x) = m : n$.

14) Desgleichen aus: $(d + x) : (d - x) = m : n$.

15) Man bestimme den Wert von x und y aus: $x : y = \left(m + n - \frac{mn}{m + n}\right) : \left(m - n + \frac{mn}{m - n}\right)$, und $x + y = 2m^3$.

16) Man berechne aus:

1) $A : B = p : q$,
2) $B : C = q : r$,
3) $C : D = r : s$,
4) $D : E = s : t$,

$A : C$, $A : D$, $A : E$, $B : D$ und $C : E$.

17) Es sei:

1) $A : B = p : q$,
2 $B : C = r : s$,
3) $C : D = t : u$,
4) $D : E = v : w$;

hieraus berechne man: $A : C$, $A : D$ und $A : E$.

18) Man verwandle folgende Proportionen

$A : B = p : q$,
$B : C = r : s$,
$C : D = t : u$

in eine fortlaufende.

19) Ebenso $A : B = 4 : 5$, $B : C = 3 : 2$, $C : D = 7 : 8$, $D : E = 9 : 10$.

20) Desgleichen $A : B = 1 : 2$, $C : D = 3 : 4$, $E : C = 9 : 8$ und $D : B = 2 : 1$.

21) Ist $x : y : z : u = p : q : r : s$, so ist

I. $(x \pm y \pm z \pm u) : x : y : z : u = (p \pm q \pm r \pm s) = p : q : r : s$;

II. $(ax \pm by \pm cz \pm du) : x : y : z : u = (ap \pm bq \pm cr \pm ds) : p : q : r : s$;

man spreche diese Sätze mit Worten aus und beweise sie.

22) Man berechne x, y, z und u aus $x + y + z + u = s$ und $x : y : z : u = a : b : c : d$.

23) Man bestimme x, y, z und u aus $x + y + z + u = 696$ und $x : y : z : u = 13 : 14 : 15 : 16$.

24) Ebenso aus $x - y - z + u = 18$ und $x : y : z : d = 17 : 7 : 5 : 1$.

25) Anwendungen der Proportionen enthalten die folgenden algebraischen Aufgaben, z. B. unter I. die Aufgaben 28—34 ꝛc. Eine besonders wichtige Rolle spielen die Proportionen in der Ähnlichkeitslehre der Geometrie. Man vergleiche hierüber Fuß, Sammlung von Konstruktions- und Rechenaufgaben aus der Planimetrie und Stereometrie, § 9. Auch bei vielen physikalischen und den sogenannten stöchiometrischen Aufgaben der Chemie finden sie Anwendung.

§ 32. Aufstellung von Gleichungen für Textaufgaben und Auflösung derselben.

I. Aufgaben vermischten Inhalts.

Mündlich.

1) Welche Zahl gibt, zu m = 133 (245,65) addiert, n = 230 (360,15)*?

2) Welche Zahl gibt, von m = 35,6 (124) subtrahiert, n = 29,7 (254)?

3) Welche Zahl gibt, mit m = 36,5 (65) multipliciert, n = 182,5 (520)?

4) Welche Zahl muß man durch $m = 1\frac{3}{5}$ (9) dividieren, damit der Quotient n = 75 (40) wird?

5) Wird von a = 1000 (840) eine gewisse Zahl subtrahiert, so erhält man b = 544 (520). Wie heißt diese Zahl?

6) Dividiert man a = 420 (209) durch eine gewisse Zahl, so beträgt der Quotient b = 28 (19). Welches ist die zu suchende Zahl?

7) Welche Zahl gibt, zu $a = 1\frac{1}{8}$ ($\frac{4}{3}$) addiert, dasselbe Resultat als mit $a = 1\frac{1}{8}$ ($\frac{4}{3}$) multipliciert?

8) Das a = 2fache (3, $\frac{1}{2}$fache), b = 3fache (2,5, $\frac{1}{3}$fache), c = 4fache (5,2, $\frac{1}{4}$fache) und d = 5fache (2, $\frac{1}{5}$fache) einer Zahl beträgt f = 42 (1270, 77). Wie heißt diese Zahl?

---

*) Diese Aufgabe enthält drei Aufgaben. Die erste Aufgabe heißt: Welche Zahl gibt, zu m addiert, n? Die zweite heißt: Welche Zahl gibt, zu 133 addiert, 230? Die dritte heißt: Welche Zahl gibt, zu 245,65 addiert, 360,15?

9) Von welcher Zahl ist das a = $\frac{1}{2}$fache ($\frac{1}{3}$fache), b = $\frac{1}{4}$fache ($\frac{1}{5}$fache), c = $\frac{1}{20}$fache ($\frac{1}{8}$fache) zusammen um d = 20 (123) kleiner als die Zahl selbst?

10) Das 2fache (3$\frac{1}{3}$fache) einer Zahl und 10 (12) ist dem 2$\frac{1}{2}$fachen (7$\frac{1}{2}$fachen) derselben Zahl weniger 10 (136) gleich. Wie heißt diese Zahl?

11) Subtrahiert man das $\frac{3}{5}$fache ($\frac{3}{4}$fache) einer gewissen Zahl von 160 (140), so erhält man die Zahl selbst. Wie heißt sie?

12) Von der Zahl 60 soll soviel weggenommen werden, daß der Rest um 12 größer ist als das Fortgenommene. Wieviel also?

13) Welche Zahlen geben, voneinander subtrahiert, 41 und zu einander addiert 59?

14) Gegenwärtig ist A 36, B 6 Jahre alt. Nach wieviel Jahren wird A 3mal so alt, als B sein? Vor wieviel Jahren war A 11mal so alt als B?

15) A ist gegenwärtig 5mal so alt und wird über 3 Jahre 4mal so alt sein als B. Wie alt ist A?

16) Bei einer Sammlung kommt, wenn jeder Teilnehmer 5,5 *M* gibt, 15 *M* mehr, wenn aber jeder 4 *M* gibt, 30 *M* weniger zusammen, als der Bedarf ist. Wieviel Teilnehmer sind es?

17) A verlor im ersten Spiel $\frac{1}{6}$ seines Geldes, im zweiten $\frac{1}{10}$ und gewann im dritten $\frac{1}{3}$ desselben. Sein Gewinn betrug daher 3 *M*. Wieviel Geld hat er mitgebracht?

18) Nachdem jemand von einer gewissen Summe $\frac{3}{7}$ weniger 2 *M* ausgegeben hatte, blieben ihm noch $\frac{1}{2}$ *M* mehr als $\frac{3}{5}$ derselben übrig. Wie groß war die Summe?

19) M wurde um die Tageszeit gefragt und antwortete: Die Stunde nach Mittag ist $\frac{1}{3}$ der Zeit bis Mitternacht. Wieviel Uhr war es?

20) Ein Spieler verlor im ersten Spiel $\frac{1}{4}$ seines Geldes, im zweiten 148 *M* und hatte jetzt nur noch soviel Pfennig, als er am Anfang des Spieles Mark bei sich hatte. Wieviel Geld hatte derselbe mitgebracht?

21) Würde jemand in 8 Monaten die Hälfte und ein Viertel seines jährlichen Einkommens verbrauchen, so müßte er, um zu reichen, jährlich 330 *M* Schulden machen. Wie groß ist sein jährliches Einkommen?

22) Ein Diener, der jährlich 260 (230) *M* und eine Livree als

Lohn bekommt, erhält für 9 (8) Monate Dienstzeit 174 (126) ℳ bar und außerdem die Livree. Wie hoch wird letztere berechnet?

23) Von zwei ineinander greifenden Zahnrädern hat das größere 96 Zähne mehr als das kleinere. In derselben Zeit, in welcher das letztere 55 Umläufe macht, führt das erste 23 aus. Wie viele Zähne hat jedes der beiden Räder?

24) Ein Faß enthielt 7mal soviel Liter als ein anderes; nachdem man aus dem ersteren 39 und aus dem letzteren 21 Liter genommen hatte, waren in jenem 9mal soviel Liter als in diesem. Wieviel enthielt ursprünglich jedes Faß?

25) Eine gewisse Arbeit besteht aus 47 Tagwerken. Die Arbeiter A, B und C haben daran gleichviel verdient. A erhält täglich 2 ℳ, B $1\frac{3}{5}$ ℳ und C $1\frac{1}{5}$ ℳ. Wie viele Tage hat jeder gearbeitet?

26) Eine Arbeit könnte von 15 Männern in 10 Tagen, oder von 10 Frauen in 24 Tagen vollendet werden. Nun sind 5 Männer 10 Tage daran thätig. Wie viele Frauen sind jetzt noch neben diesen 5 Männern notwendig, damit die Arbeit in 10 Tagen vollendet werde?

27) 4 Arbeiter brauchen zu einer gewissen Arbeit $1\frac{1}{2}$ Tage, 5 Arbeiter brauchen zu derselben Arbeit $1\frac{1}{5}$ Tage. Wie lange brauchen sie, wenn sie zusammen arbeiten, den Tag zu 10 Stunden gerechnet?

28) A verdient, wenn er täglich 9 Stunden arbeitet, in 5 Tagen soviel als B in 6 Tagen, wenn er täglich 7 Stunden arbeitet. Einige Zeit hindurch haben beide gemeinschaftlich jeden Tag gleichviel Stunden gearbeitet und zusammen $101\frac{1}{2}$ ℳ verdient. Wieviel gebührt jedem hievon?

29) Eine Arbeit kann von 4 Arbeitern in 60 Tagen vollendet werden. Nach 5 Tagen kommen noch 4 Arbeiter von derselben Leistungsfähigkeit hinzu und nach 10 Tagen darauf noch 4 Arbeiter. In wieviel Tagen wird die ganze Arbeit fertig?

30) Jemand erntet 16mal soviel, als er ausgesäet hat und noch 7 hl; nachdem er $\frac{2}{5}$ der ganzen Ernte verkauft hat, waren noch 585 hl übrig. Wieviel hl betrug die Aussaat?

31) Drei Schriftsetzer sollen 98 Bogen setzen und à Bogen 12 ℳ Setzerlohn erhalten. A setzt in 15 Stunden $\frac{3}{4}$ Bogen, B in 18 Stunden $\frac{4}{5}$ Bogen und C in 20 Stunden $\frac{5}{6}$ Bogen. Wie lange setzen sie an den 98 Bogen und wieviel erhält jeder seiner Leistung entsprechend?

Schriftlich.

1) Wenn man eine gewisse Zahl mit 4 multipliciert, vom Produkt 5 subtrahiert, den Rest mit 3 multipliciert, zum Produkt 5 addiert und dann von dem so erhaltenen Resultat die Null zur rechten wegläßt, so erhält man 17. Wie heißt diese Zahl?

2) Wenn man eine gewisse Zahl mit a = 5 (10) multipliciert, zum Produkt b = 10 (20) addiert, mit der Summe in c = 300 (1200) dividiert, und den Quotienten von d = 100 (500) subtrahiert, so erhält man f = 91 (490). Wie heißt dieselbe?

3) Wenn man zu einer gewissen Zahl ihr a = $\frac{3}{4}$faches ($\frac{2}{3}$faches) addiert, die Summe mit b = 4 (9) multipliciert und zum Produkt das c = $\frac{5}{6}$fache ($\frac{5}{8}$fache) der gesuchten Zahl addiert, so ist das Ergebnis ebensoviel über d = 17$\frac{2}{3}$ (66$\frac{1}{2}$), als die gesuchte Zahl selbst unter d = 17$\frac{2}{3}$ (66$\frac{1}{2}$) ist. Wie heißt sie?

4) Es soll die Zahl a = 50 (150) so in zwei Teile zerlegt werden, daß der mit b = 2 (4) multiplicierte erste Teil um d = 25 (50) größer ist als der mit c = 3 (6) multiplicierte zweite Teil. Wie heißen diese zwei Teile?

5) Man soll die Zahl 45 (680) so in zwei Teile teilen, daß, wenn der erste Teil durch 3 (25), der zweite durch 9 (21) dividiert wird, die Summe der Quotienten 11 (28) beträgt; wie heißen beide Teile?

6) In welche zwei Teile muß man die Zahl a = 85 (90) zerlegen, damit der größere, durch den kleineren dividiert, b = 6 (7) zum Quotienten und c = 1 (2) zum Reste gibt?

7) Von welcher Zahl ist der a = 5te Teil um b = 3 kleiner als der c = 8te Teil der um d = 96 vermehrten Zahl?

8) Der Bruch a : b soll in den Bruch c : d verwandelt werden: erstens dadurch, daß man zum Zähler und Nenner dieselbe Zahl addiert; zweitens dadurch, daß man von beiden dieselbe Zahl subtrahiert; drittens dadurch, daß man dieselbe Zahl vom Zähler subtrahiert und zugleich zum Nenner addiert. Welche Zahl ist in jedem Fall zu nehmen?

9) Von einer Zahl nimmt man den 3. Teil weg und zählt dann 30 hinzu; von dieser Summe nimmt man wieder den 5. Teil weg und fügt 44 hinzu; auf diese Weise erhält man 100. Wie heißt die Zahl?

10) Welche Zahl ist es, die, wenn man von ihr die Hälfte und

$\frac{1}{2}$ nimmt, vom Rest abermals die Hälfte und $\frac{1}{2}$ subtrahiert und dies Verfahren noch 2mal fortsetzt, $4\frac{5}{8}$ (1) zum Reste gibt?

11) Nimmt man von einer gewissen Zahl die Hälfte weniger 6 weg, von dem Rest wieder die Hälfte weniger 6 und verfährt so noch 2mal, so bleibt schließlich $17\frac{1}{2}$ übrig. Wie heißt diese Zahl?

12) Die Differenz der Quadrate zweier aufeinander folgender Zahlen der natürlichen Zahlenreihe beträgt 31 (49); welche Zahlen sind es?

13) Die Differenz der Quadrate zweier um 4 voneinander abstehender Zahlen der natürlichen Zahlenreihe beträgt 112 (216); wie heißen die beiden Zahlen?

14) Addiert man zu den Zahlen a und b die Zahl x, so wird die Differenz der Quadrate dieser Summen gleich c; wie groß ist x?

15) Addiert man zu a und zu 2a eine gewisse Zahl, quadriert beide Summen und subtrahiert das erstere Quadrat vom letzteren, so erhält man das Quadrat des b fachen von a. Wie heißt diese Zahl?

16) Ein Spieler verliert bei dem ersten Spiele $\frac{5}{12}$ seiner mitgebrachten Barschaft, gewinnt hierauf $\frac{1}{7}$ des Restes, verliert alsdann wieder $\frac{3}{8}$ seiner vergrößerten Summe, gewinnt sodann $\frac{4}{5}$ des Restes und hört endlich, nachdem er $\frac{2}{3}$ der letzten Summe verloren hatte, zu spielen auf und findet, daß er im ganzen 63 ℳ verloren hatte. Wieviel besaß er anfänglich?

17) Ein Landwirt hat zwei Taglöhner, die für gleichen Lohn bei ihm arbeiten. Dem einen gibt er für 56 Tage 8 hl Frucht und 40,8 ℳ; dem andern für 98 Tage 16 hl Frucht und 53,6 ℳ. Wie hoch wurde das hl Frucht berechnet und wieviel betrug der Taglohn?

18) Jemand berichtigte eine Schuld von 74,40 ℳ mit 48 Stück frs. und fl. ö. Wie viele Stück waren es von jeder Sorte?

19) Die drei längsten Brücken der Welt, nämlich: a) die Brücke von Montreal über den St. Lorenz-Strom, b) die Brücke von Brooklyn über den East-River und c) die Rapperswyler Brücke über den Züricher-See sind zusammen 6063 m lang, und zwar ist a um 811 m länger, c dagegen um 226 m kürzer als b. Wie lang ist jede der drei Brücken?

20) Der „Stern des Südens“ und der „Piggott“, zwei sehr wertvolle Diamanten, wiegen zusammen $207\frac{1}{4}$ Karat; wieviel wiegt jeder, wenn die Hälfte vom Gewicht des zweiten und der fünfte Teil von dem des ersten zusammen $66\frac{1}{8}$ Karat beträgt?

21) Die bekannten größten Diamanten der Welt: der Orloff im russischen Zepter, der Regent im französischen Staatsschatz und der Kohinur im Besitz der Königin von England, wiegen zusammen $437\frac{9}{16}$ Karat (1 Karat = 0,205 g), und zwar wiegt der zweite $30\frac{1}{16}$ Karat mehr als der dritte und der erste 58 Karat mehr als der zweite; wieviel wiegt jeder?

22) Würde die Geschwindigkeit des Schalles 2mal, $\frac{2}{5}$- und $\frac{5}{6}$mal so groß sein, als sie wirklich ist, so legte der Schall in einer Sekunde eine Strecke von 1076,4 m zurück. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Schalles?

23) Wenn man die Zahl, welche angibt, in welchem Jahr Scheele den Sauerstoff entdeckte, mit 3 multipliciert, von dem Produkt 322 subtrahiert und diese Differenz durch 8 dividiert, so erhält man zum Quotienten 625. In welchem Jahre wurde jene Entdeckung gemacht?

24) 236 bleierne Kugeln, größere und kleinere, wiegen zusammen $8\frac{3}{4}$ Pfund, und zwar gehen von den größeren 24, von den kleineren 32 auf 1 Pfund. Wie viele sind es von jeder Sorte?

25) Ein Wirt kaufte 3,40 hl, teils weißen, teils roten Wein. Das Liter des ersteren kostete 1,10 ℳ und das des letzteren 1,20 ℳ. Wieviel Liter waren es von jeder Sorte, wenn die erstere im ganzen 29 ℳ mehr kostete als die letztere?

26) M kaufte 72 Stück Hühner- und Gänseeier um 3,93 ℳ und zwar kosteten je 15 Hühnereier 0,65 ℳ und je 3 Gänseeier 0,22 ℳ. Wieviel Eier hat M von jeder Sorte gekauft?

27) Ein Wohlthäter verteilte unter 9 dürftige Kinder, nämlich unter 4 Knaben und 5 Mädchen, 3840 ℳ. Die Knaben erhielten gleichviel, jedoch bekam jeder $\frac{1}{4}$ mehr als das älteste Mädchen. Wieviel erhielt dieses, wenn die Anteile der jüngeren Mädchen ebenfalls gleich, aber um 40 ℳ kleiner waren als der Teil des ältesten Mädchens?

28) Subtrahiert man von jedem Gliede einer zwischen 4 Zahlen aufgestellten geometrischen Proportion gleichviel, so erhält man hiedurch die falsche Proportion $13 : 113 = 235 : 631$. Wie heißt die ursprüngliche Proportion?

29) In einer Proportion verhält sich das erste Glied zum dritten wie $5 : 6$; das dritte Glied ist um 96 größer als das erste und um 1440 kleiner als das vierte. Wie heißt die Proportion?

30) Eine geometrische Proportion hat folgende Beschaffenheit. Die

Summe des 2. und 3. Gliedes beträgt 472; die Differenz zwischen dem 3. und 4. Glied ist 396 und das 1. Glied verhält sich zum 2. wie 3 : 7. Wie heißt diese Proportion?

31) Das dritte Glied einer geometrischen Proportion verhält sich zum vierten wie 3 : 7; die Summe dieser beiden Glieder ist 1260 und die Summe des ersten und vierten Gliedes ist 990. Wie heißt diese Proportion?

32) Die Barschaft des B ist das 5fache von der des A. Erhielte jeder 50 *M* zu derselben, so würde sich die Barschaft des A zu der des B wie 2 : 5 verhalten. Wieviel *M* besitzt jeder?

33) Die Öffnungen zweier Wasserbehälter verhalten sich wie 6 : 11, die Geschwindigkeiten der ausfließenden Ströme wie 9 : 8. Aus der einen Öffnung flossen in einer gewissen Zeit 374 cdm Wasser mehr als aus der andern. Wieviel Wasser gab jede Öffnung in dieser Zeit?

34) Ein Landmann kaufte ein Pferd, eine Kuh, ein Schwein, eine Ziege und ein Schaf zusammen für 605 *M*; der Preis des Pferdes verhält sich zu dem der Kuh wie 10 : 7, der der Kuh zu dem der Ziege wie 7 : 1, der des Pferdes zu dem des Schweines wie 15 : 2 und der des Schweines zu dem des Schafes wie 8 : 5. Wieviel kostete jedes Stück?

35) Eine Frau, A, spinnt einen gewissen Vorrat Flachs in 48 Tagen, B in 36 Tagen, C spinnt täglich $\frac{1}{16}$ Pfund mehr als B. Spinnen sie alle zusammen, so werden sie in 12 Tagen fertig. Wieviel Flachs ist es?

36) 12 Personen können eine gewisse Arbeit in 120 Tagen bei 10stündiger täglicher Arbeitszeit vollenden. Nach 24 Tagen kommen noch 6 Arbeiter hinzu und nun wird täglich 12 Stunden lang gearbeitet. 12 Tage darauf gehen 3 Arbeiter weg, und die übrigen arbeiten 12 Stunden lang. In wieviel Tagen wird die Arbeit nach Abgang dieser 3 Arbeiter fertig sein?

37) Ein Gemeindewald von 1381 ha ist mit Buchen, Eichen und Kiefern bepflanzt, und zwar beträgt die mit Kiefern besetzte Fläche 200 ha mehr als $\frac{3}{8}$, die mit Eichen bepflanzte 50 ha mehr als $\frac{4}{5}$ der Fläche des Buchenwaldes. Wieviel ha kommen auf jede der genannten Baumarten?

38) Jemand hat zusammen 451,58 *M* in Gold, Silber, Nickel und Kupfer und zwar 2mal soviel Zwanzigmarkstücke als Einmarkstücke, $2\frac{1}{5}$ mal soviel Einmarkstücke als Zehnpfennigstücke und $1\frac{1}{4}$ mal

soviel Zehnpfennigstücke als Zweipfennigstücke. Wieviel hat er von jeder Sorte?

39) Jemand zahlt von einer Forderung auf Abschlag 20 ℳ mehr als den 8. Teil; später $\frac{1}{4}$ des Restes weniger 25 ℳ und als dritte Zahlung $\frac{1}{5}$ des nunmehrigen Restes + 6 ℳ. Die drei Abschlagszahlungen betrugen zusammen 150 ℳ. Wie groß war die Forderung?

40) Von einer Summe Geldes, die unter eine gewisse Anzahl Personen verteilt werden soll, erhält A 1000 ℳ und $\frac{1}{7}$ des Restes; B 2000 ℳ und wieder $\frac{1}{7}$ des Restes; von diesem Rest bekommt C 3000 ℳ und wieder $\frac{1}{7}$ des Restes u. s. f. Auf diese Weise bekommen alle gleichviel. Wie groß ist die zu teilende Summe? Wieviel bekommt jede Person? Wieviel Personen sind es?

41) Ein Landwirt besitzt 415 Stück Gänse und Schafe. Als er sämtliche Gänse gegen Schafe umgetauscht hatte, wobei er für je 35 Gänse 4 Schafe erhielt, war er im Besitz von 260 Schafen. Wie viele Gänse hatte er umgetauscht?

42) Man hat 3 Weinfässer. Füllt man das erste leere Faß aus dem zweiten vollen, so bleibt im zweiten $\frac{2}{7}$ des Weines zurück; füllt man das zweite leere aus dem dritten vollen, so bleibt im dritten $\frac{3}{10}$ des Weines zurück; wollte man aber das dritte leere aus dem ersten vollen füllen, so würden 50 l fehlen. Wieviel l hält jedes Faß?

43) Aus einem vollen Fasse zapfte man zunächst $\frac{2}{5}$ seines Inhaltes und noch 60 Liter ab, später $\frac{3}{8}$ des Restes weniger 25 Liter, hierauf $\frac{1}{4}$ von dem letzten Reste weniger 15 Liter und endlich noch die Hälfte vom zuletzt entstandenen Rest und 50 Liter; im Fasse blieben dann noch 130 Liter zurück. Wieviel Liter hielt das Faß?

44) Ein Kaufmann besaß ein gewisses Kapital. Von demselben nahm er 1000 ℳ weg und vermehrte den Rest durch ein rentables Geschäft in einem Jahr um $\frac{1}{4}$ desselben. Zu dieser Summe legte er zu Anfang des zweiten Jahres 3000 ℳ, verlor aber an dem so entstandenen Kapital während des zweiten Jahres $\frac{1}{6}$ desselben. An dem um 10000 ℳ vermehrten Rest gewann er im dritten Jahr die Hälfte. Am Ende des dritten Jahres betrug sein Vermögen 1000 ℳ mehr als das Doppelte seines ursprünglichen Kapitals. Wie groß war dasselbe?

45) Ein Kaufmann vermehrt sein Vermögen jährlich um die Hälfte (um 20%), scheidet aber von demselben alle Jahre 2000 (1000) ℳ zu seinem Unterhalt aus. Dadurch hat sich das anfängliche Vermögen nach 3 Jahren um 1000 ℳ über das $2\frac{1}{2}$fache desselben vermehrt (au

das Doppelte des anfänglichen Vermögens weniger 10440 *M*). Wie groß war das Vermögen anfangs?

46) Jemand bestimmt in seinem Testament, daß sein Verwandter M den achten Teil seines hinterlassenen Vermögens und außerdem 1500 *M*, und sein Diener den zehnten Teil des Restes und 300 *M* bekommen soll. Der nunmehrige Rest soll der Volksschule, dem Waisenhaus und dem Spital seiner Vaterstadt zufallen, und zwar soll die erstere den fünften Teil des letzten Restes und 880 *M*, das Waisenhaus $\frac{3}{10}$ des jetzigen Restes und 1320 *M* und das Spital endlich den letzten Rest, der 23600 *M* beträgt, erhalten. Wie groß ist das hinterlassene Vermögen und wieviel bekommt hievon der Verwandte, der Diener, die Volksschule und das Waisenhaus?

47) A kann eine gewisse Arbeit in 8 Tagen, B in 10 Tagen, C in 12 Tagen und D in 15 Tagen vollenden. Wie lange müssen alle vier gleichzeitig arbeiten, wenn A während der Zeit 1 Tag, B $2\frac{1}{2}$ Tage und C $1\frac{1}{2}$ Tage verhindert ist?

II. Bewegungsaufgaben.

Mündlich.

1) Zwei Körper haben die Entfernung $d = 1200$ m. Sie bewegen sich einander gleichförmig mit den Geschwindigkeiten*) $c = 5$ m und $c_1 = 3$ m entgegen. Wann treffen sie zusammen?

2) Wann treffen die beiden Körper der vorigen Aufgabe zusammen, wenn sich dieselben hintereinander bewegen?

3) Zwei Körper haben die Entfernung $d = 1200$ m und die Geschwindigkeiten $c = 5$ m und $c_1 = 3$ m. Der erste Körper, der sich dem zweiten entgegenbewegt, beginnt seine Bewegung um $t = 60$ Sekunden früher. Wann treffen sie sich?

4) Wann treffen die beiden Körper der vorigen Aufgabe zusammen, wenn die Bewegung hintereinander erfolgt?

5) Zwei Körper haben die Entfernung $d = 1200$ m; Körper A legt in $t = 3$ Sekunden eine Wegstrecke von $s = 15$ m, Körper B in $t_1 = 4$ Sekunden einen Weg von $s_1 = 12$ m zurück. Wann begegnen sich beide, wenn Körper A seine Bewegung $n = 60$ Sekunden früher beginnt?

---

*) Bei der gleichförmigen Bewegung versteht man unter Geschwindigkeit den Weg, der von dem in Bewegung begriffenen Körper in der Zeiteinheit (Sekunde, Stunde) zurückgelegt wird.

6) Vor 12 Tagen ging von einem gewissen Ort ein Bote ab, der täglich 5 Meilen machte; ein anderer Bote, der ihm nachgeschickt wurde, legt täglich 8 Meilen zurück. In wieviel Tagen wird der zweite Bote den ersten einholen?

7) A reist von M nach N und legt in jeder Stunde 15 km zurück, 8 Stunden später wird ihm B von demselben Ort aus nachgeschickt, der in 3 Stunden 69 km macht. In wieviel Stunden wird A von B eingeholt?

8) A reist von M nach N und legt täglich 30 km zurück; gleichzeitig reist B von einem um 75 km mehr rückwärts gelegenen Orte aus nach N und macht täglich 48 km. Nach wieviel Tagen und in welcher Entfernung von M treffen A und B zusammen?

9) Einem Boten, der täglich eine gewisse Anzahl km zurücklegt, wird 2 Tage nach seiner Abreise ein anderer nachgeschickt, der, um ihn in 6 Tagen einzuholen, täglich 6 km mehr zurücklegen muß. Wieviel km legt jeder Bote täglich zurück?

10) Ein Kurier macht in 5 Stunden 8 Meilen; 12 Stunden später wird ihm ein zweiter nachgeschickt, der in 4 Stunden 7 Meilen macht. In wieviel Stunden wird der zweite den ersten einholen?

11) Zwei Personen A und B, von denen A in 4 Stunden 60 km, B in 2 Stunden 42 km zurücklegt, reisen von zwei, um 513 km voneinander entfernten Dörfern einander entgegen und zwar reist B um 3 Stunden später ab als A. Nach wieviel Stunden und wo treffen beide zusammen?

12) Von M aus wird ein Kurier nach N geschickt; 4 Stunden später wird ihm ein anderer nachgesandt, der den ersten einholen soll. In welcher Zeit werden beide zusammentreffen, wenn die Geschwindigkeit des ersteren zu der des letzteren wie 3 : 4 sich verhält?

Schriftlich.

1) A und B bewegen sich von M nach N. A legt in 5 Stunden 72 km, B in 4 Stunden 31 km zurück. Nachdem B bereits $15\frac{1}{2}$ km zurückgelegt hat, beginnt A seine Bewegung und gelangt um $6\frac{1}{3}\frac{8}{1}$ Stunden früher nach N als B. In welcher Zeit legte A den Weg MN zurück und wie lang ist derselbe?

2) Ein Wasserbehälter kann durch 3 Röhren entleert werden, und zwar durch die erste in 3, die zweite in 4, die dritte in 5 Stunden. In wieviel Stunden würde der Behälter entleert werden, wenn man die 3 Röhren zugleich öffnete?

3) Ein Wasserbehälter, welcher $735\frac{3}{5}$ l faßt, kann durch drei Röhren gefüllt werden. Die erste liefert 12 l in $3\frac{1}{2}$ Stunden, die zweite 15 l in $2\frac{1}{4}$ Stunden, die dritte 18 l in 4 Stunden. In welcher Zeit wird der Behälter gefüllt, wenn alle drei Röhren zugleich fließen?

4) Durch drei Röhren, aus welchen zu gleicher Zeit Wasser in einen Behälter fließt, wird dieser in $1\frac{3}{5}$ ($1\frac{1}{5}$) Stunden gefüllt. Durch die erste Röhre allein erfolgt die Füllung in $3\frac{3}{4}$ ($2\frac{1}{2}$) Stunden, durch die zweite allein in $6\frac{2}{3}$ ($3\frac{1}{3}$) Stunden. In welcher Zeit wird er durch die dritte Röhre allein gefüllt?

5) Ein Wasserbehälter hat zwei Zuflußröhren A und B und eine Abflußröhre C. Durch die Röhre A allein wird der Behälter in 8 Stunden gefüllt, durch die Röhre B allein in 16 Stunden; durch die Röhre C wird der volle Behälter in 3 Stunden entleert, wenn die Zuflußröhren verschlossen sind. Werden, nachdem der Behälter voll ist, die 3 Röhren zugleich geöffnet, so befinden sich nach 4 Stunden noch 1000 l in demselben. Wieviel l faßt der Behälter?

6) Bei einem Eisenbahnbau sind zwei Arbeitergruppen A und B verwendet. A fördert in 5 Stunden 120 cbm Erde 600 m weit, B dagegen in 3 Stunden 45 cbm Erde 1500 m weit. Sämtliche Arbeiter führen von derselben Stelle nach dem gleichen Orte Erde, Gruppe A fängt 3 Stunden früher an zu arbeiten als Gruppe B; letztere hatte nach 12 Stunden 540 cbm Erde mehr gefördert als erstere. Wie weit wurde die Erde gebracht?

7) In einem Bergwerk befinden sich zur Herausschaffung des Grubenwassers 3 Dampfmaschinen. Die erste Maschine ist im stande, alle 6 Minuten 12 hl Wasser aus einer Tiefe von 168 m zu heben, die zweite vermag alle 4 Minuten 11 hl Wasser 96 m hoch zu fördern, die dritte endlich schafft alle 3 Minuten 10 hl aus einer Tiefe von 87 m. In welcher Zeit würden alle 3 Maschinen vereinigt 2670 hl Wasser auf eine Höhe von 240 m zu bringen vermögen?

8) Welchen Teil der vollen Umdrehung p beschreibt der große und kleine Zeiger der Uhr in einer Minute, in n Minuten, in einer Stunde, einer halben Stunde?

9) Die Zeiger der Uhr stehen um 12 Uhr übereinander. Nach wieviel Minuten stehen sie wieder übereinander?

10) Es ist 4 Uhr; wann decken sich beide Zeiger?

11) Es ist 3 Minuten über $\frac{3}{4}$ neun. Nach wieviel Minuten wird der große Zeiger über dem kleinen stehen?

12) Aus einem Wasserbehälter, der 1273 Liter faßt und bereits 397 Liter enthält, fließen durch eine Röhre in je 6 Minuten 45 Liter aus; durch eine andere Röhre fließen in je 4 Minuten 51 Liter zu. Nach welcher Zeit wird dieser Wasserbehälter angefüllt sein, wenn die erste Röhre 12 Minuten früher geöffnet wird, als die zweite?

13) Eine Mauer, welche $29\frac{1}{3}$ m lang, 1 m breit und 5 m hoch ist, soll von zwei Maurern aufgeführt werden. Der eine bringt täglich, wenn er 8 Stunden arbeitet, $4\frac{1}{2}$ cbm, der andere in 8 Tagen, den Tag zu 9 Stunden gerechnet, 38 cbm fertig. Wie lange brauchen beide zu dieser Mauer, wenn jeder täglich 10 Stunden arbeitet und der erste 4, der zweite 1 Tag versäumt?

14) Man hat in einem Bergwerk, um daraus das Grubenwasser zu schaffen, zwei Dampfmaschinen aufgestellt. Die erste fördert alle 4 Minuten 10 hl Wasser aus einer Tiefe von 144 m; die zweite schafft alle 8 Minuten aus einer $\frac{5}{9}$ mal so geringen Tiefe ein Wasserquantum, welches sich zu dem erstgenannten verhält wie 1,25 : 0,5. Wieviel Pferde ersetzt jede Dampfmaschine, wenn 61 Pferde die Gesamtarbeit leisten können?

III. Prozent-, Gewinn- und Verlustrechnungen.

Mündlich.

1) Jemand verkauft eine Ware für 392 ℳ mit 40 % Gewinn. Wieviel hat dieselbe im Einkauf gekostet?

2) Ein Kaufmann verkauft Ware für 350 ℳ und verliert $16\frac{2}{3}$ % hiebei. Wieviel kostete die Ware im Einkauf?

3) Man verkauft das g einer Ware zu 15 ₰ mit $12\frac{1}{2}$ % Gewinn. Wie hoch kam das kg im Einkauf zu stehen?

4) Wird das kg einer Ware um 1,75 ℳ verkauft, so gewinnt man im ganzen 10 ℳ an der Ware. Verkauft man es aber um 1 ℳ, so verliert man 20 ℳ. Wie hoch ist der Einkaufspreis eines kg und wieviel kg sind es?

5) Man verliert $12\frac{1}{2}$ %, wenn man eine Ware zu $52\frac{1}{2}$ ℳ verkauft. Wieviel Prozent Gewinn oder Verlust hat man, wenn man dieselbe Ware zu $62\frac{1}{2}$ ℳ abgibt?

6) Jemand gibt eine Ware zu 336 ℳ mit einem Gewinn von $6\frac{2}{3}$ % ab; wieviel Prozent würde er gewinnen oder verlieren, wenn er dieselbe Ware zu 300 ℳ verkaufen müßte?

7) Jemand gewann durch einen Handel $14\frac{2}{7}$ %; hiedurch wuchs

die hierauf verwendete Summe auf 2409$\frac{3}{5}$ ℳ an. Wie groß war dieselbe?

8) Jemand gibt eine Ware mit 14$\frac{2}{7}$ % Verlust ab und kauft für den Erlös neue Waren, an denen er nun 14$\frac{2}{7}$ % gewinnt, indem er sie um 730$\frac{2}{7}$ ℳ verkauft. Wie hoch kam die erste Ware zu stehen?

9) A verkauft an B eine Ware mit 6$\frac{2}{3}$ % Verlust; B verkauft dieselbe Ware an C mit 12$\frac{1}{2}$ % Gewinn; C verkauft sie an D mit 20 % Verlust um 1260 ℳ. Wie teuer hat A diese Ware eingekauft?

10) Wenn jemand eine Ware für 154 ℳ verkauft, so gewinnt er 10 %. Wie teuer muß er sie verkaufen, um 20 % zu gewinnen?

Schriftlich

1) Ein Kaufmann bezieht ein Stück Tuch, das m zu 9,75 ℳ. Beim Nachmessen findet er, daß das Stück 2 m mehr enthält als er bezahlt hat; dafür ist aber das Tuch von geringerer Güte. Aus diesem Grunde kann er das m nun zu 9 ℳ verkaufen. Hiedurch erwächst ihm ein Verlust von 4$\frac{8}{13}$ %. Wie viel m waren ausbedungen?

2) Ein Kaufmann verkaufte eine Partie Zucker um 140 ℳ und verlor hiebei eine gewisse Summe. Später verkaufte er von derselben Ware ebensoviel um 220 ℳ und gewann dadurch 3 mal soviel als er verloren hatte. Wie teuer hatte er dieselbe eingekauft?

3) Jemand kauft eine Ware um 1050 ℳ und verkauft dieselbe wieder mit 6$\frac{2}{3}$ % Gewinn, indem er an jedem Kilogramm $\frac{1}{20}$ ℳ Nutzen hat. Wieviel kg hatte er von der Ware eingekauft und was kostete das kg im Einkauf?

4) A hatte 420 kg einer Ware eingekauft; B bietet ihm $\frac{1}{20}$ ℳ Gewinn am kg und zahlt ihm 399 ℳ für dieselbe. Wie hoch hatte A das kg eingekauft?

5) A möchte an einer gewissen Ware 9 ℳ gewinnen. Gibt er das kg zu 0,5 ℳ, so verliert er an derselben 36 ℳ; gibt er es aber zu $\frac{7}{8}$ ℳ, so gewinnt er 18 ℳ. Wie teuer muß er das kg verkaufen?

6) Ein Kapitalist legt $\frac{5}{12}$ seines Geldes bei einem Fabrikgeschäft an und gewinnt jährlich durch dasselbe 15 %; $^1/_3$ seines Vermögens verwendet er auf Eisenbahnaktien, durch welche er einen jährlichen Gewinn von 10$\frac{2}{5}$ % erhält; mit dem Rest endlich beteiligt er sich bei einer Aktienbrauerei, bei welcher er aber jährlich 4$\frac{1}{2}$ % verliert. Wenn ihm nun im ganzen aus seinem Gelde ein jährlicher Gewinn von 4124 ℳ erwächst, wie groß ist sein Kapital?

7) Ein Kaufmann, dessen Handelskapital jährlich $16\frac{2}{3}$ % Gewinn abwirft, verkauft eine Ware, welche er vor $1\frac{1}{2}$ Monaten bezahlt hatte, um 510,25 ℳ, zahlbar nach 5 Monaten. Wie hoch kam diese Ware im Einkauf?

8) A hatte für B 3764,70 ℳ eingenommen und wollte ihm diesen Betrag durch die Post senden. Das Postgeld, welches $\frac{1}{8}$ % betrug, brachte A in Abrechnung. Wieviel mußte A schicken?

9) M hatte dem N 4788 ℳ portofrei zu übersenden. Wieviel muß die Barsendung betragen, wenn das Porto, welches $2\frac{1}{2}$ ‰ ausmacht, am Ort der Absendung nicht bezahlt werden kann?

10) Ein Kaufmann gewann an einem gewissen Kapital im ersten Jahr $12\frac{1}{2}$ %. An dem um diesen Gewinn vermehrten Kapital hatte er im zweiten Jahr einen Gewinn von 10 %. Im dritten Jahr aber verlor er 5 % von dem durch den zweiten Gewinn erhöhten Kapital. Am Ende des dritten Jahres fand der Kaufmann, daß er im ganzen $1264\frac{1}{2}$ ℳ gewonnen hatte. Wie groß war das anfängliche Kapital?

11) Ein Kaufmann erhielt zwei Warensendungen von gleichem Bruttogewichte. Das Nettogewicht der ersten Sendung betrug nach Abzug eines gewissen Prozents Tara (in Hundert) 636,5 kg; das der zweiten Sendung dagegen betrug 616,4 kg, da bei ihr die Tara 3 % mehr ausmachte. Wieviel % Tara wurde bei jeder der zwei Sendungen berechnet?

12) Ein Kaufmann bezog von einer Kaffeehandlung 5 gleich schwere Ballen Kaffee und außerdem noch 81 Pfund und zahlte im ganzen 750 ℳ. Die Tara betrug für die Ballen $6\frac{2}{3}$ % und beim Auswägen ergab sich am Nettogewicht ein Verlust von $2\frac{2}{9}$ %. Wieviel betrug das Bruttogewicht eines Ballens, wenn der Kaufmann das Pfund zu 1,50 ℳ verkaufte und dadurch im ganzen $14\frac{2}{5}$ % gewann?

13) Ein Kaufmann besaß ein gewisses Kapital. Von demselben verbrauchte er 2600 ℳ, beteiligte sich mit dem Reste ein Jahr lang bei einem Fabrikgeschäfte und gewann dabei $12\frac{1}{2}$ %. Von dem um diesen Gewinn vermehrten Kapital nahm er zu Anfang des zweiten Jahres 1500 ℳ zurück und legte den Rest ein Jahr lang bei einer Aktienbrauerei an, wobei er einen Gewinn von $33\frac{1}{3}$ % machte. Diesen schlug er wieder zum Betriebskapital, zog aus demselben zu Anfang des dritten Jahres 2000 ℳ und beteiligte sich mit dem Reste bei einem Bergwerksunternehmen. Dieses warf einen Nutzen von 20 % ab. Mit dem um diesen Gewinn erhöhten Kapital blieb er noch ein Jahr lang

bei diesem Unternehmen und gewann dadurch noch 40 %. Am Ende des vierten Jahres betrug sein Vermögen 6800 ℳ mehr als das Doppelte seines ursprünglichen Kapitals. Wie groß war das letztere?

14) Ein Kaufmann hat sein Haus und sein Warenlager nach dem vollen Wert versichert und bezahlt für jenes $1\frac{4}{5}$ ‰, für dieses 2 ‰. Wie hoch schlägt er den Wert seines Hauses und wie hoch den seines Magazins an, wenn die Prämie für das erstere 10,60 ℳ mehr beträgt als die für das letztere und beide Versicherungssummen zusammen sich auf 41250 ℳ belaufen?

15) Jemand besitzt ein Gut, das im Durchschnitt 50688 ℳ abwirft. Dasselbe besteht nach seinem Kapitalwerte zu $\frac{1}{3}$ aus Waldungen, zu $\frac{1}{4}$ aus Äckern, zu $\frac{1}{5}$ aus Wiesen, zu $\frac{1}{6}$ aus Weinbergen, und der Rest des Kapitalwertes kommt auf die Gärten. Wie groß ist der Wert des Gutes, wenn sich die Waldungen zu 10 %, die Äcker zu 14 %, die Wiesen zu 16 %, die Weinberge zu 9 % und die Gärten zu 4 % rentieren?

16) Ein Kapitalist hatte sein ganzes Vermögen bei drei Kaufleuten stehen. Bei dem ersten Kaufmann standen $\frac{7}{15}$, beim zweiten $\frac{2}{5}$ und beim dritten der Rest seines Kapitals. Am ersten Posten verlor der Kapitalist $1\frac{4}{7}$ % weniger 60 ℳ, am zweiten $3\frac{5}{6}$ % und 220 ℳ und am dritten $1\frac{7}{8}$ %. Die Kapitalien, die ihm nach Abzug dieser Verluste blieben, legte er nun bei einem Fabrikunternehmen an und erzielte dabei in $2\frac{1}{2}$ Jahren einen Gewinn von 8749,50 ℳ, indem sich sein Gesamtkapital durchschnittlich in jedem Jahre mit 6 % verzinste. Welche Summe hatte der Kapitalist bei den drei Kaufleuten auf Zinsen?

IV. Aufgaben der Rabatt- und Diskontorechnung.

Vorbemerkung. Rabatt ist ein dem Käufer von Waren am Kaufpreise derselben bewilligter Nachlaß oder Abzug. Man unterscheidet einen Rabatt in Hundert und einen Rabatt auf Hundert; der erstere wird von je 100 abgezogen, so daß man also bei 4 % Rabatt in Hundert anstatt 100 nur 100 — 4 = 96 zahlt; beim Rabatt auf Hundert dagegen wird derselbe zu je 100 gezählt; bei 4 % Rabatt auf 100 sind also dann anstatt 100 + 4 oder 104 nur 100 zu zahlen. **Diskonto** heißt ein Abzug oder Nachlaß, welcher bei Geldzahlungen (Wechseln) von einer Forderung gewährt wird, wenn der Schuldner dieselbe vor der Verfallzeit abträgt. Die Summe, welche nach Ablauf einer bestimmten Zahlungsfrist zu entrichten ist, nennt man die **Schuld** oder den **künftigen Wert**, und die vor der Verfallzeit gezahlte und um den Abzug verminderte Summe die **Barzahlung**, den **baren** oder **gegenwärtigen** Wert. — Bei Rabatt-

rechnungen kann der Rabatt und die Barzahlung, oder die Schuldsumme, oder der Prozentsatz oder die Zeit zu berechnen sein.

Mündlich.

1) Jemand hat c = 500 ℳ nach t = $\frac{3}{4}$ Jahren zu bezahlen; wenn er sogleich bezahlt, werden ihm p = 6 % Rabatt in Hundert p. a. gewährt. Wieviel beträgt der Rabatt r und die Barsumme b?

2) Jemand verkauft Waren für eine bestimmte Summe mit p = $8\frac{1}{3}$ % Rabatt in Hundert und erhält als bare Zahlung b = $756\frac{1}{4}$ ℳ. Wieviel beträgt die Schuldsumme c?

3) A hat für Waren nach 9 Monaten eine gewisse Summe zu bezahlen. Da er sogleich zahlt, darf er $49\frac{1}{2}$ ℳ abziehen, weil ihm 5 % Rabatt p. a. bewilligt werden. Für welchen Betrag hat er Waren gekauft?

4) Jemand bezahlt für eine Ware, die ihm zu c = 7 ℳ berechnet wurde, b = 5,88 ℳ. Wieviel betragen die Prozente p des Rabatts?

5) Die Barsumme für eine Ware betrug b = $716\frac{1}{4}$ ℳ, der Rabatt r = $33\frac{3}{4}$ ℳ und die Prozente desselben per Jahr p = 6 %. Nach welcher Zeit t war die Summe zu zahlen?

6) Wieviel beträgt die Barsumme b für c = 1800 ℳ, nach t = 4 Jahren zahlbar, bei p = $6\frac{1}{4}$ % Rabatt (auf 100)?

7) Eine nach t = 2 Jahren fällige Schuldsumme c wird gegenwärtig bei p = 4 % Rabatt (auf Hundert) mit b = 5000 ℳ bezahlt. Wie groß ist dieselbe?

8) Für eine Summe, die nach 5 Jahren fällig war, betrug der Rabatt r = 200 ℳ, die Barsumme b = 1000 ℳ; wieviel Prozent p beträgt der Rabatt?

Schriftlich.

1) Jemand verkauft eine Ware für 1600 ℳ und eine andere für 2000 ℳ; bei der ersteren gibt er 2 % Rabatt (in Hundert) mehr als bei der zweiten, und die Barsumme für beide Waren beträgt 3424 ℳ. Wieviel Prozent Rabatt wird von jeder Ware bewilligt?

2) Jemand hat nach $4\frac{1}{2}$ ($3\frac{1}{2}$) Monaten 1467 (974) ℳ und später noch 1411 (930) ℳ zu bezahlen. Zahlt er gleich, so braucht er nur 2800 (1860) ℳ zu entrichten, da ihm für diesen Fall 5 % Diskonto auf Hundert gewährt werden. Nach wieviel Monaten war die zweite Summe zu bezahlen?

3) A bietet für ein Gut 4500 ℳ bar und 8700 ℳ nach 5 Jahren oder auch bar mit 4 % Rabatt (auf 100); B bietet für dasselbe 6000 ℳ bar und eine gewisse Summe nach 8 Jahren oder auch bar mit 6 % Rabatt. Beide Angebote sind gleich. Welche Summe will B nach 8 Jahren entrichten?

4) Jemand hat nach $4\frac{1}{2}$ Monaten 1593,55 ℳ und 3 Monate später eine gewisse Summe zu bezahlen. Zahlt er gleich, so hat er 2844 ℳ zu entrichten, da ihm dann 4 % Diskonto (auf 100) gewährt werden. Welche Summe ist nach der angegebenen Zeit zu zahlen?

5) Für ein Gut bietet A 12070 ℳ, nämlich 7075 ℳ bar und 4995 ℳ nach 7 Jahren, oder auch bar mit 5 % Rabatt (auf Hundert). B bietet eine Summe, von welcher er $\frac{1}{3}$ nach 2, $\frac{1}{3}$ nach 4 und $\frac{1}{3}$ nach 6 Jahren abtragen will, oder die ganze Summe sogleich bar mit 5 % Rabatt (auf Hundert). Wieviel hat der zweite Käufer geboten, wenn beide Angebote gleich sind?

6) Jemand erhält für sein Anwesen zwei Angebote. M bietet 12375 ℳ bar und 8050 ℳ, nach 3 Jahren zahlbar. N bietet eine Summe, von welcher er $\frac{1}{4}$ nach 2, $\frac{1}{4}$ nach 4, $\frac{1}{4}$ nach 6 und $\frac{1}{4}$ nach 8 Jahren erlegen will. Beide Personen sind bereit, die ganze Summe sogleich zu bezahlen, wenn ihnen 5 % Rabatt (auf 100) gewährt werden. Welche Summe bietet B an, wenn sein Gebot dem des A gleich ist?

V. Aufgaben der Zinsrechnung.

Vorbemerkung. Bei den Zinsrechnungen sind folgende Begriffe zu unterscheiden: Kapital, Zins, Prozent und Zeit. Kapital ist eine bestimmte Geldsumme, welche gegen eine jährliche Vergütung ausgeliehen wird. Derjenige, welcher das Kapital ausleiht, wird Gläubiger (Kreditor), derjenige, welcher es entlehnt, Schuldner (Debitor) genannt. Zins ist die Vergütung für das geliehene Kapital. Prozent oder Zinsfuß ist der Zins für je 100 des geliehenen Kapitals und für die Zeit eines Jahres.

I. Einfacher Zins.

Mündlich.

1) Es soll die gegenseitige Abhängigkeit der 4 Größen: Kapital k, Prozente p, Zeit t und Zinsen Z durch eine Gleichung ausgedrückt werden*)!

*) Die Zinsen eines Kapitals sind abhängig von dem angelegten Kapital, den Prozenten, zu welchen es aussteht und der Zeit, während der es ausgeliehen

2) Wieviel Zins geben 950 ℳ zu $4\frac{1}{2}$ % in 2 Jahren 8 Monaten?

3) Welches Kapital wirft zu 4 % in 3 Jahren 9 Monaten $221\frac{1}{4}$ ℳ Zinsen ab?

4) 850 ℳ haben zu 4 % in einer gewissen Zeit 119 ℳ Zins eingebracht. Wie lange sind sie ausgestanden?

5) Ein Kapital von 1250 ℳ wirft in $4\frac{4}{5}$ Jahren 270 ℳ Zinsen ab. Zu wieviel Prozent ist dasselbe ausgeliehen?

6) Ein Kapital von 850 ℳ wird zu 4 % ausgeliehen; wieviel beträgt Kapital und Zins zusammen nach 5 Jahren?

7) Welches Kapital beträgt am Ende des 2. (10.) Jahres mit seinen 4 (5) prozentigen Zinsen 4536 (1350) ℳ?

8) Es leiht jemand ein Kapital von 4300 ℳ auf $3\frac{1}{5}$ Jahre aus und erhält an Zinsen und Kapital 4988 ℳ zurück. Zu wieviel % war das Kapital angelegt?

9) Die rückständigen Zinsen von 5640 ℳ Kapital zu 5 % machen mit dem Kapital 6627 ℳ. Wie lange sind keine Zinsen gezahlt worden?

10) Zählt man zu einem gewissen Kapital, das zu $14\frac{2}{7}$ % angelegt ist, die 5jährigen Zinsen desselben, so erhält man 40812 ℳ; wie groß ist das Kapital?

11) Jemand, der jährlich 1620 ℳ Zins einnahm, hatte $\frac{3}{4}$ seines Kapitals zu 4 % und den Rest zu 6 % ausgeliehen. Wie groß war das Kapital?

12) Ein Kapitalist, der jährlich $2254\frac{1}{2}$ ℳ Zins einnimmt, hat

---

ist, sie sind die Wirkung von diesen 3 Ursachen. Jede Größe, die von einer oder mehreren Größen abhängig ist, mit ihnen in einem gewissen Zusammenhange steht, so daß eine Änderung dieser letzteren auch eine Änderung der ersteren bewirkt, wird eine Funktion dieser anderen Größe oder Größen genannt. Der Zinsertrag ist also eine Funktion von dem Kapital, den Prozenten und der Zeit. Ist eine Größe eine Funktion von mehreren anderen Größen, so ist auch umgekehrt jede der letzteren Größen eine Funktion von allen übrigen. Daraus folgt, daß mit der einen Gleichung, die man zwischen mehreren zusammengehörigen, durch allgemeine Zahlen ausgedrückten Größen aufgestellt hat, zugleich die Auflösung von soviel Aufgaben gegeben ist, als die Gleichung verschiedene Größen enthält. Man hat nur nötig, die aufgestellte Gleichung für jede der verschiedenen Größen aufzulösen, sie auf dieselben zu reduzieren.

den 4. Teil seines Kapitals zu 4 %, $\frac{1}{3}$ desselben zu $4\frac{3}{4}$ %, $\frac{2}{5}$ zu 5 % und den Rest zu $3\frac{1}{3}$ % ausgeliehen. Wie groß ist sein Kapital?

13) Dividiert man mit den einjährigen Zinsen eines zu 5 % ($6\frac{2}{3}$ %, $7\frac{1}{7}$ %) ausgeliehenen Kapitals in den 5. Teil (3. Teil, die Hälfte) des Kapitals und addiert zum Quotienten 21 (35, 43), so erhält man den einjährigen Zins dieses Kapitals. Wie heißt dasselbe?

14) Ein Kapital ist zu $12\frac{1}{2}$ % ausgeliehen. In wieviel Jahren werden die Zinsen zusammen das $3\frac{3}{4}$ fache des Kapitals ausmachen?

15) Zu wieviel % ist ein Kapital angelegt, wenn dessen 10jährige Zinsen zusammengenommen so groß sind als $\frac{9}{20}$ des Kapitals?

16) Ein Kapital von 1000 ℳ wird zu 5 % und 5 Jahre später ein anderes von 2000 ℳ zu 4 % ausgeliehen. Nach wieviel Jahren haben diese Kapitalien gleichviel Zinsen getragen?

17) Man leiht 2500 ℳ zu $4\frac{1}{2}$ % aus und 5 Jahre später 4875 ℳ zu 4 %. Nach welcher Zeit ist der Zinsertrag des letzteren Kapitals um 370 ℳ kleiner als der des ersteren?

18) Ein Kapital, das zu 5 % ausgeliehen ist, ist um 150 ℳ größer als ein anderes zu $4\frac{1}{2}$ % auf Zinsen stehendes. Wie groß sind beide, wenn das erstere $10\frac{1}{2}$ ℳ mehr trägt?

19) Ein zu 5 % ausgeliehenes Kapital brachte in $2\frac{1}{5}$ Jahren 165 ℳ; ein um 250 ℳ größeres Kapital trug in derselben Zeit 11 ℳ weniger Zins. Zu wieviel % wurde das letztere Kapital verzinst?

Schriftlich.

1) Jemand hatte ein gewisses Kapital 5 Jahre lang zu $4\frac{1}{2}$ % und ein anderes um 1550 ℳ kleineres Kapital 8 Jahre lang zu 4 % ausgeliehen und von beiden 1466 ℳ Zins eingenommen. Wie groß waren die beiden Kapitalien?

2) Ein Kapital von 2400 ℳ ist nach einer gewissen Reihe von Jahren auf 3762 ℳ angewachsen. $\frac{1}{4}$ der Zeit stand es zu $3\frac{3}{4}$ %, $\frac{1}{3}$ der Zeit zu $4\frac{1}{2}$ % und die übrige Zeit zu $5\frac{1}{2}$ %. Wie lange stand das Kapital aus?

3) R hatte vor 12 Jahren 5000 ℳ und S vor 10 Jahren 2400 ℳ ausgeliehen und zwar S um 2 % höher als R. R hatte $1\frac{2}{3}$ mal soviel Zinsen bezogen als S. Zu wieviel Prozent waren beide Kapitalien angelegt?

4) Ein Kapitalist stellt eine gewisse Summe zu 4 % auf Zinsen. Nach 3 Jahren nimmt er den 10. Teil des Kapitals zurück und läßt

den Rest 8 Monate stehen. Nach Verlauf dieser Zeit nimmt er $\frac{1}{9}$ des Restes zurück und läßt das nunmehrige Kapital $1\frac{1}{2}$ Jahre stehen. Am Ende dieser Zeit hatte er im ganzen 3840 ℳ Zinsen eingenommen. Wie groß war das anfängliche Kapital?

5) A leiht dem B 4500 ℳ, dem C 3400 ℳ zu einem um $\frac{1}{2}$ % höheren Zinsfuße. Von beiden erhält er jährlich $313\frac{1}{4}$ ℳ Zinsen. Wieviel % muß jeder geben?

6) Zwei zu $4\frac{2}{5}$ % und 4 % ausgeliehene Kapitalien, welche zusammen 7900 ℳ betragen, bringen in $2\frac{1}{2}$ Jahren 835 ℳ Zinsen. Wie groß ist jedes Kapital?

7) Ein Rentier leiht $\frac{1}{4}$ eines gewissen Kapitals zu 5 %, $\frac{1}{3}$ desselben zu 4 % und den Rest zu 3 % aus. Nach $5\frac{1}{4}$ Jahren erhält er an Kapital und Zinsen $7207\frac{1}{2}$ ℳ. Wie groß ist das Kapital?

8) Von einem gewissen Kapital steht der erste Teil zu 5 % 4 Jahre lang aus; der zweite Teil, der um 100 ℳ kleiner ist, als das $\frac{2}{3}$fache des ersten, ist 6 Jahre lang zu 4 % ausgeliehen, der Rest, welcher 180 ℳ mehr als das $\frac{4}{5}$fache der beiden ersten Teile zusammen beträgt, steht zu $4\frac{1}{2}$ % 10 Jahre lang. Kapital und sämtliche Zinsen betragen zusammen 5961 ℳ. Wie groß sind die 3 Teile des Kapitals?

II. Einige Aufgaben der Zinseszinsrechnung (ohne Logarithmen zu lösen).

Schriftlich.

1) Es soll die Fundamentalgleichung der Zinseszinsrechnung entwickelt werden!

2) Jemand stellt 5000 ℳ zu 5 % 4 Jahre lang auf Zinseszins aus; wie groß ist nach dieser Zeit sein Kapital?

3) Jemand möchte nach 3 Jahren zu 4 % ein Kapital von 6000 ℳ zur Verfügung haben; wieviel muß er jetzt auf Zinseszins ausleihen?

VI. Aufgaben der Terminrechnung.

Vorbemerkung. Die Terminrechnung lehrt einerseits, wie für zwei oder mehrere Kapitalien, die nicht gleichzeitig zu entrichten sind, ein Tag, der mittlere Zahlungstermin, bestimmt werden kann, an welchem sämtliche Kapitalien auf einmal, ohne Nachteil an Zinsen weder für den Schuldner, noch den Gläubiger, abgetragen werden können; andererseits, wie für einen oder mehrere Zahlungstermine mehrere andere zu finden sind.

Schriftlich

1) Jemand soll 3050 ℳ nach 4 Monaten, 2350 ℳ nach 3 Mo-

naten und 850 *M* nach 10 Monaten zahlen. Wann ist die ganze Summe zu entrichten?

2) Jemand soll eine Schuld von 9000 *M* wie folgt abtragen: Nach $2\frac{1}{2}$ Monaten 2400 *M*, nach 4 Monaten einen gewissen Teil und nach $7\frac{1}{2}$ Monaten den Rest. Er hält aber diese Termine nicht ein, sondern zahlt die ganze Summe auf einmal nach 5 Monaten. Wie groß ist der 2. und 3. Teil dieser Schuld?

3) Jemand hat am 1. Mai 5000 *M*, am 16. Juni 3000 *M* und am 21. Juli 2000 *M* zu zahlen. Wann ist der mittlere Zahlungstermin (jeden Monat zu soviel Tagen gerechnet als er wirklich hat und den Tag der Zurückzahlung nicht mitgezählt)?

4) Ein Kapitalist macht sich verbindlich, einem Kaufmann 20000 *M* auf 12 Monate zu leihen. Da er jedoch die ganze Summe nicht vorrätig hat, so vereinigen sich beide Teile dahin, daß der Kapitalist vorerst 4000 *M* hergeben soll, nach Verlauf von 6 Monaten aber noch 6000 *M* und dann nach Verlauf von 9 Monaten die letzten 10000 *M*. Wie lange kann nun der Kaufmann das ganze Kapital von 20000 *M* noch behalten?

5) Jemand hat 3 Summen zu bezahlen, und zwar 900 *M* nach 3 Monaten, 700 *M* 2 Monate später und die letzte Summe endlich wieder 5 Monate später. Die 3 Summen kann er, ohne Nutzen und Schaden zu haben, in 5,1 Monaten zahlen. Wie groß ist die 3. Summe?

6) Von einer Schuld sollen 800 *M* nach 6 Monaten bezahlt werden, 5 Monate später 900 *M* und wieder 7 Monate später der Rest. Auf einmal hätte die ganze Summe nach 15 Monaten bezahlt werden müssen. Wie groß ist diese Schuld?

7) Jemand hat 2700 *M* nach 6 Monaten zu bezahlen. Da er diese Summe nicht auf einmal entrichten kann, so bezahlt er nach 2 Monaten 500 *M*, 2 Monate später 800 *M*, und wieder 3 Monate später 1000 *M*. Wie lange kann er den Rest von 400 *M* noch behalten?

8) Jemand kauft ein Haus für 20500 *M* unter der Bedingung, diese Summe nach 12 Monaten zu zahlen. Er kommt mit dem Verkäufer überein, nach 3 Monaten 2500 *M* und nach dieser Zeit in 4 gleichen Terminen jedesmal 4500 *M* abzutragen. In welchen Terminen haben die Zahlungen zu erfolgen?

9) Jemand soll eine Schuld von 3450 *M* wie folgt abtragen: 1050 *M* nach 1 Jahr, 1 Jahr später einen gewissen Teil und wieder 1 Jahr später den Rest. Er hält aber diese Termine nicht ein, son-

dern zahlt die ganze Summe auf einmal nach $2\frac{2}{5}$ Jahren. Hiebei muß er jedoch 5 %, nämlich 69 ℳ, Verzugszinsen entrichten. Wieviel betrug der zweite und dritte Teil der Schuld?

10) Jemand hat eine gewisse Schuld nach 5 Monaten zu zahlen, eine um 1184 ℳ größere Summe 3 Monate später und wieder 5 Monate später einen Posten, der 1440 ℳ mehr als der zweite beträgt. Auf einmal könnte er, ohne Nutzen und Schaden zu haben, seine ganze Schuld nach 10 Monaten entrichten. Wieviel müßte er nach dieser Zeit zahlen?

11) Jemand hat am 1. März ein gewisses Kapital, am 16. Juni 4800 ℳ und am 1. August 3200 ℳ zu zahlen. Der mittlere Zahlungstermin ist der 23. Mai. Wie groß ist das erste Kapital (jeden Monat zu 30 Tagen gerechnet)?

VII. Aufgaben der Teilungsrechnung.

Mündlich.

1) Von 26000 ℳ soll A 4 mal soviel als B, B aber 5 mal soviel als C erhalten. Wieviel bekommt jeder?

2) Von 4322 ℳ soll A 3 mal soviel als B bekommen, und der Anteil des B soll sich zu dem des C wie 3 : 4 verhalten. Wieviel bekommt jeder?

3) Von einer gewissen Summe soll A $\frac{3}{8}$, B $\frac{1}{6}$, C $\frac{1}{4}$ und D den Rest mit 5000 ℳ bekommen. Wieviel erhalten die drei ersten Personen?

4) Vier Personen haben sich unter eine gewisse Summe wie folgt geteilt: A bekam $\frac{2}{5}$, B vom Rest $\frac{1}{4}$, C von dem nunmehrigen Rest $\frac{2}{3}$ und D den letzten Rest im Betrage zu 165 ℳ. Wieviel erhielt jede?

5) 365 ℳ sollen unter 3 Personen so verteilt werden, daß C $37\frac{1}{2}$ % weniger als B und B $14\frac{2}{7}$ % mehr als A bekommt. Wieviel erhält jede?

6) A, B und C legen 5000 ℳ zusammen; A hat hiezu 10 %, B 25 % mehr als C gelegt. Wieviel hat jeder von dem Gewinn, der 540 ℳ beträgt, zu beanspruchen?

7) A, B, C und D teilen 720 ℳ so, daß A $\frac{1}{4}$ von B, C $\frac{5}{8}$ von D, D aber $\frac{5}{9}$ von der Summe erhält. Wieviel bekommt jeder?

8) 301 ℳ sollen unter 4 Personen so verteilt werden, daß sich der Anteil des A zu dem des B wie 3 : 4, der des B zu dem des C wie 5 : 6 und der des C zu dem des D wie 8 : 9 verhält. Wieviel bekommt jede?

9) Drei Personen teilen sich unter 568 ℳ so, daß sich der Anteil des A zu dem des B wie $\frac{1}{2}$ zu $\frac{3}{5}$ und der des B zu dem des C wie $\frac{2}{3}$ zu $\frac{3}{4}$ verhält. Wieviel bekommt jede?

10) A hat 2 Wochen, B 4 Wochen und C 3 Wochen gearbeitet. B leistet $14\frac{2}{7}$ % mehr als A und C $16\frac{2}{3}$ % weniger als A. Wieviel muß jeder von 1143 ℳ Verdienst bekommen?

11) A, B, C und D sollen 1675 ℳ so unter sich teilen, daß A soviel erhält wie B und C, B soviel als C und D, D aber 25 ℳ weniger als C. Wieviel erhält jeder?

12) Zu einem gemeinschaftlichen Geschäfte haben A und B zusammen 35000 ℳ eingelegt. A war mit seiner Einlage $3\frac{1}{2}$, B aber mit der seinigen $4\frac{2}{3}$ Jahre beteiligt. Von dem Gewinn, den sie nach Verhältnis der Einlage und Zeit verteilen, erhielt jeder gleichviel. Wieviel hatte jeder eingelegt?

13) A, B und C traten zu einem Handelsgeschäft zusammen. A legte halb soviel ein als C oder 4000 ℳ weniger als B. Vom Gewinn, der 8100 ℳ betrug, erhielt C 3600 ℳ. Wieviel hatte jeder eingelegt?

14) Die Summe von 4020 ℳ soll unter vier Personen A, B, C und D so verteilt werden, daß der siebenfache Anteil des A, der achtfache Anteil des B, der vierfache Anteil des C und der fünffache Anteil des D die gleiche Summe ist. Wieviel bekommt jede Person?

Schriftlich.

1) Unter 5 Personen sollen 75000 ℳ folgendermaßen verteilt werden: B soll 3 mal soviel erhalten als A weniger 8000 ℳ; C $\frac{7}{11}$ mal soviel als B und 5000 ℳ; D $\frac{1}{2}$ mal soviel als B und C zusammen weniger 500 ℳ und E endlich $\frac{1}{5}$ mal soviel als B weniger 400 ℳ. Wieviel bekommt jede Person?

2) Die Summe von 36000 ℳ soll unter 5 Personen wie folgt verteilt werden: B soll $1\frac{1}{2}$ mal soviel als A bekommen weniger 1000 ℳ; C die Hälfte von dem, was A und B zusammen erhalten und 500 ℳ; D das $\frac{2}{5}$ fache dessen, was B und C zusammen bekommen und $\frac{1}{3}$ des Anteiles von A; E endlich $\frac{1}{5}$ des Anteiles der vier ersten Personen nebst 360 ℳ. Wieviel erhält jede Person?

3) Eine Waldfläche von 46312 ha soll unter 3 Gemeinden, A, B, C, nach Maßgabe ihrer Bevölkerung verteilt werden, A soll aber außerdem $\frac{1}{49}$ des Anteiles der Gemeinden B und C erhalten. Wieviel bekommt jede Gemeinde von der Waldfläche, wenn die Bevölkerung der

Gemeinden A und B sich wie 3 : 7 und die der Gemeinden B und C sich wie 2 : 5 verhalten?

4) Vier Personen, A, B, C, D, vereinigen sich zu einem Geschäft. A gibt 4300 ℳ auf 5 Monate dazu; B 2500 ℳ auf 6 Monate; C 5000 ℳ auf 2 Monate und D 8000 ℳ auf $1\frac{1}{2}$ Monate. Wieviel bekommt jede von dem gemeinsamen Gewinn, der 2106 ℳ beträgt?

5) Drei Personen unternahmen ein Geschäft. A gab 10000 ℳ, B 15000 ℳ, C 25000 ℳ dazu. Sie gewannen 6844,8 ℳ. Diesen Gewinn verteilen sie nach Verhältnis der Einlagen; jedoch soll die zweite 20 % und die dritte $33\frac{1}{3}$ % über ihren Anteil erhalten. Wieviel bekommt jede Person?

6) A, B und C legen eine gewisse Summe zusammen. B gibt $33\frac{1}{3}$ % mehr als A, C 200 ℳ mehr als A und B zusammen und erhält vom Gewinn, der 720 ℳ beträgt, 405 ℳ. Wieviel hat jede Person eingelegt?

7) A, B, C und D legten zu einem Handelsgeschäft eine gewisse Summe zusammen. B gab 25 % mehr als A, C $\frac{1}{3}$ der Einlage des A und B zusammen und noch 600 ℳ, D die Hälfte des von B und C eingelegten Geldes und noch 500 ℳ. Von dem Gewinn, der 2028 ℳ betrug, erhielt D 624 ℳ. Wieviel hatte jeder eingelegt?

8) In einem Eisenbahnzug befanden sich 295 Personen, und zwar verhielt sich die Anzahl der Passagiere der I. Klasse zu der der II. Klasse wie 3 : 4 und die der II. Klasse zu der der III. Klasse wie 5 : 6. Zwei Billete der II. Klasse kosteten soviel als 3 Billete der III. Klasse und ein Billet der I. Klasse das $1\frac{1}{2}$ fache eines Billets der II. Klasse. Für sämtliche Billete wurden 2808 ℳ gelöst. Wie viele Passagiere waren in jeder Klasse und was kostete je ein Billet?

9) Ein Holzlieferant kaufte 244 Klafter Brennholz von verschiedener Güte. Die Klafter kam durchschnittlich auf 10,75 ℳ und als Fuhrlohn hatte er 4,50 ℳ per Klafter zu zahlen. Beim Sortieren dieses Holzes hatte er 4 Klafter Abgang und er erhielt $37\frac{1}{2}$ % erster, $33\frac{1}{3}$ % zweiter und $29\frac{1}{6}$ % dritter Qualität. Er löste nun für eine Klafter zweiter Qualität 2,50 ℳ mehr als für eine Klafter der dritten Qualität und 4,50 ℳ weniger als für eine Klafter der ersten. Wie hoch verkaufte er die Klafter einer jeden Sorte, wenn er bei diesem Holzgeschäft im ganzen 1369 ℳ gewann?

10) Fünf Erben teilten sich in eine Hinterlassenschaft auf folgende

Weise. A bekam 2000 ℳ mehr als $\frac{1}{6}$ des ganzen Vermögens; B 1500 ℳ mehr als $\frac{3}{4}$ des Anteiles von A; C halb soviel als A und B zusammen weniger 500 ℳ; D $\frac{3}{5}$ vom nunmehrigen Rest weniger 200 ℳ und E das Übrige im Betrage zu 19000 ℳ. Wie groß war das Vermögen?

11) Unter 3 Personen A, B und C wurden 500 ℳ so verteilt, daß B $\frac{3}{5}$ soviel als A, und C den Rest erhielt. Nach der Verteilung schenkte aber A von seinem Anteil dem B und C $\frac{2}{5}$ dessen, was jeder schon besaß, und darnach schenkte wieder B von seinem nunmehrigen Teil den beiden andern den vierten Teil dessen, was jeder jetzt hatte. Schließlich stellte sich heraus, daß C 10 ℳ weniger hatte als A und B zusammen. Wieviel bekam jeder anfänglich von den 500 ℳ?

12) Drei Personen traten mit einer gewissen Summe zu einem Geschäfte zusammen. Die Einlage des A betrug $85\frac{5}{7}$ % von der des B, und C gab 1260 ℳ mehr dazu als A und B zusammen. A ließ seinen Anteil 14 Monate, B 16 Monate und C 17 Monate im Geschäft. Von dem Gewinn, der 2263,50 ℳ betrug, erhielt C 1283,50 ℳ. Wieviel hatte jede Person eingelegt und wieviel betrug der Gewinn des A und B?

VIII. Aufgaben der Mischungsrechnung.

Vorbemerkung. Bei der Mischung von Gegenständen kommt sowohl deren Güte oder Qualität, die im Preis, Feingehalt u. s. w. derselben zum Ausdruck kommt, als auch deren Menge oder Quantität, die durch Maß oder Gewicht bestimmt wird, in betracht. Die Mischungsrechnungen sind mehrfacher Art. Zunächst kann verlangt sein, die Mischungsqualität zu finden, wenn die Qualitäten und Quantitäten der einzelnen zu mischenden Warensorten gegeben sind (Durchschnittsrechnung). Ferner kann die Mischungsqualität, die Qualität und Quantität der einen zu mischenden Sorte, sowie die Quantität oder Qualität der andern Sorte gegeben und verlangt sein, die Qualität oder Quantität der andern Sorte zu suchen. Endlich kann der Fall vorliegen, daß die Mischungsquantität und Qualität, sowie die Qualitäten der einzelnen zu mischenden Sorten gegeben und die Quantitäten der letzteren zu suchen sind.

Mündlich.

1) Jemand legiert 100 g Feingold, 160 g Gold vom Feingehalt 0,9 und 140 g Kupfer. Welches ist der Feingehalt der Legierung?

2) A mischt 2 Ztr. einer Ware, das Pfund zu 2,25 ℳ mit 0,50 Ztr. einer andern Ware, das kg zu 1,20 ℳ. Wie teuer muß er das Pfund der Mischung verkaufen, wenn er $12\frac{1}{2}$ % gewinnen will?

3) Aus 30 l Weingeist von 90 % (75 %) Gehalt sollen durch Zusatz 50 l (42 l) von 80 % ($57\frac{1}{7}$ %) dargestellt werden. Von welcher Qualität muß der hinzuzusetzende Weingeist sein?

4) Zwei Weinsorten sollen im Verhältnis 3 : 2 miteinander gemischt werden. Das l der ersten Sorte kostet 48 Pfennig, das der Mischung soll 42 Pfennig kosten. Wieviel muß das l der andern Sorte kosten?

5) 9 hl Wein à 75 ℳ sollen mit einer Weinsorte zu 100 ℳ derart gemischt werden, daß man eine Mischung zu 80 ℳ erhält. Wieviel hl von der Sorte zu 100 ℳ sind zu nehmen?

6) Man hat eine 576 kg schwere Legierung von Kupfer und Zink; das erste Metall verhält sich zum zweiten wie 5 : 3. Wie kann das Mischungsverhältnis in 6 : 5 umgeändert werden a) durch Veränderung des Kupfers, b) durch Veränderung des Zinks?

7) Ein 70 %iger Spiritus soll in einen solchen verwandelt werden, in dem sich der Alkohol zum Wasser wie 3 : 2 verhält. a) Wie ist der Alkohol, b) das Wasser, c) Alkohol und Wasser zu verändern, wenn die Spiritusmenge 320 Liter beträgt?

8) Aus 2 Sorten Wein, das l zu 46 und zu 80 ₰ sollen 187 l zu 64 ₰ gebildet werden. Wieviel ist von jeder Sorte zu nehmen?

9) Ein Wirt hat zweierlei Wein: das l zu 80 ₰ und zu 1,10 ℳ. Hieraus mischt er 72 l à l 1 ℳ. Wieviel l hat er von jeder Sorte zu nehmen

a) wenn sich weder ein Verlust noch Gewinn ergeben soll,

b) wenn er $9\frac{1}{11}$ % gewinnen will?

Schriftlich.

1) Es ist durch Gleichungen auszudrücken der Zusammenhang zwischen den Mengen m und n zweier verschiedener Sorten einer Ware, den Preisen p und q derselben und dem Durchschnittspreis d der Ware!

2) Jemand mischt vier verschiedene Sorten einer Ware und verkauft das kg der Mischung zu 2,69 ℳ. Von der ersten Sorte kostet das kg 2,40 ℳ, von der zweiten 2,60 ℳ, von der dritten 2,50 ℳ und von der vierten 3,25 ℳ. Wieviel kg nahm er von jeder Sorte, wenn er von der zweiten 10 kg mehr als von der ersten, von der dritten $\frac{6}{5}$ mal soviel als von der zweiten und noch 6 kg und von der vierten $\frac{3}{4}$ mal soviel als von der dritten weniger 3 kg zu der Mischung verwendete?

3) Es soll eine 2,75 Kilogramm schwere Legierung vom Feingehalt 0,865 bereitet werden. Hiezu benützt man 1,25 Kilogramm einer Legierung vom Feingehalt 0,725. Wie groß muß der Feingehalt des noch hinzuzusetzenden Metalls sein?

4) Man hat 950 g Silber vom Feingehalt 0,85; hieraus soll eine Legierung vom Feingehalt 0,65 dargestellt werden. Wieviel Silber vom Feingehalt 0,60 ist hiezu noch erforderlich?

5) Jemand will aus zwei verschiedenen Sorten einer Ware, von der 1 Pfund der besseren Sorte p, 1 Pfund der schlechteren q ℳ kostet, s Pfund so mengen, daß 1 Pfund des Gemisches d ℳ kostet. Wieviel muß man von jeder Sorte nehmen?

6) Zwei Silberbarren enthalten zusammen 27,825 kg Feinsilber. Der eine ist 0,75 fein und der andere 0,82. Wieviel wiegt jeder, wenn sich das Gewicht des ersteren zu dem des letzteren wie 5 : 9 verhält?

7) Es werden 508,28 kg feines Silber (spez. Gew. = 10,48) und 204,75 kg Kupfer (spez. Gew. = 8,75) zusammengeschmolzen. Welches ist das spezifische Gewicht und der Feingehalt der Legierung?

IX. Aufgaben aus der Physik.

Vorbemerkung. Eine größere Zahl physikalischer Aufgaben enthält das Lehrbuch der Physik von Fuß und Hensold; Freiburg, Herder. Hier sollen nur einige Beispiele Platz finden.

Mündlich.

1) Die Krone des Hiero von Syrakus wog 10 kg; wieviel mußte sie im Wasser verlieren, wenn sie reines Gold oder reines Silber war? (spezifisches Gewicht des Goldes = 20, des Silbers = 10). Sie verlor 0,625 kg; wieviel Gold und Silber enthielt sie?

2) Ein cylindrisches Gefäß, dessen innerer Querschnitt 12,56 qdm beträgt, ist zum Teil mit Wasser gefüllt. Um wieviel steigt das Wasser, wenn man in dasselbe ein 26,9 kg schweres Messingstück vom spez. Gewicht 8,5 versenkt?

3) Ein Kaufmann kauft den hl Petroleum um 26,25 ℳ. Wie teuer muß er 12 kg verkaufen, wenn er $14\frac{2}{7}$ % gewinnen will und das spezifische Gewicht des Petroleums 0,8 ist?

4) In einem Schaufenster hängen 3 Thermometer nebeneinander. Das eine ist nach R, das andere nach C und das dritte nach F eingeteilt. Jemand beobachtet den Quecksilberstand und findet, daß die

Summe der Grade, welche sie zeigen, 86° (140°, — 22°) beträgt. Wieviel zeigt jedes Thermometer?

5) Die Arme eines Hebels sind 0,80 m und 0,75 m lang; an den Enden derselben sollen zusammen $170\frac{1}{2}$ kg so aufgehängt werden, daß Gleichgewicht entsteht; wie müssen die $170\frac{1}{2}$ kg verteilt werden?

6) Ein Hebel ist 3 m lang; wo muß der Unterstützungspunkt liegen, wenn 2 Gewichte von $18\frac{3}{4}$ kg und $26\frac{1}{4}$ kg daran im Gleichgewicht sein sollen?

7) Die Arme eines im Gleichgewicht befindlichen Hebels sind 4 und 5 dm lang. An dem längeren Arm hängen 10 kg weniger, als am kürzeren. Wieviel kg trägt jeder Hebelarm?

Schriftlich.

1) Die Krone des Königs Hiero von Syrakus wog 20 Pfund und verlor im Wasser $1\frac{1}{4}$ Pfund. Wieviel Gold und wieviel Silber enthielt sie, wenn das spezifische Gewicht des ersteren Metalls 19,64 und das des letzteren 10,5 angenommen wird?

2) Wieviel Korkholz vom spezifischen Gewicht 0,24 muß man mit 40 kg Blei vom spezifischen Gewicht 11,324 verbinden, damit ein Körper entsteht, der wie Tannenholz vom spezifischen Gewicht 0,45 schwimmt?

3) Das absolute Gewicht eines Körpers sei = p, sein spezifisches Gewicht = s′ (größer als das des Wassers). Welche Gewichtsmenge eines zweiten Körpers vom spezifischen Gewichte = s″ (kleiner als das des Wassers) muß mit diesem verbunden werden, damit ein Körper entstehe, der gerade so im Wasser schwimme, wie ein homogener Körper vom spezifischen Gewicht = s?

4) Wieviel kg Kork müssen mit 1 kg Silber verbunden werden, damit dasselbe im Wasser schwebt?

5) 21 Pfund Silber verlieren im Wasser 2 Pfund und 96 Pfund Gold 5 Pfund. Eine Komposition von Silber und Gold, welche 276 Pfund wiegt, verliert im Wasser 18 Pfund. Wieviel Gold und Silber ist in dieser Komposition?

6) Es soll der algebraische Ausdruck für die lineare Ausdehnung der Körper gefunden werden!

7) Ebenso für die kubische Ausdehnung!

8) Man soll den Ausdruck für die Reduktion eines Gases auf den Normaldruck von 760 mm entwickeln!

9) Es soll der algebraische Ausdruck des Gay-Lussac-Mariotteschen Gesetzes entwickelt werden!

10) Eine Gasmenge nimmt bei 750 (500, 560) mm Druck ein Volumen von 540 (84, 360) cdm ein; welchen Raum bei einem Druck von 760 mm?

11) Eine Gasmenge nimmt bei 0° ein Volumen von 100 ccm ein; wie groß ist das Volumen, wenn das Gas bei unverändertem Drucke auf 100° erwärmt wird?

12) Wie groß dagegen, wenn es auf 100° abgekühlt wird?

13) Welchen Raum nehmen 18 ccm von 13° und 760 mm Druck bei 0° und demselben Druck ein?

14) Welches ist das auf 0° und 760 mm reducierte Volumen von 18 Liter eines Gases von 13° und einem Druck von 755 mm?

15) 2 Gewichte von p und q Pfund hängen an den Enden einer a m langen Stange. An welcher Stelle muß die Stange zur Bildung des Gleichgewichts unterstützt werden?

16) Zwei Hebelarme verhalten sich wie m : n. An ihren Endpunkten sollen Gewichte ins Gleichgewicht gebracht werden, die zusammen R kg wiegen. Wie müssen diese verteilt werden?

17) Die Länge eines physischen Hebels AB von prismatischer Form und homogener Masse sei 24 Meter, sein Gewicht 96 Pfund, sein Stützpunkt 4 Meter von A entfernt, und am Endpunkt A hängen 300 Pfund. Welches Gewicht am Endpunkt B bringt den Hebel ins Gleichgewicht?

X. Aufgaben aus der Chemie.

Bemerkung. Wer im Mathematikunterricht stöchiometrische Aufgaben lösen lassen will, der findet solche in: Fuß, Grundzüge der Chemie; Nürnberg, Korn, 3. Auflage.

II. Mit mehreren Unbekannten.

§ 33. Auflösung gegebener Gleichungen.

I. Gleichungen mit zwei Unbekannten.

a) Gleichungen mit bestimmten Zahlen.

1) $3x + 2y = 42,$ $\quad$ 2) $3x - 2y = 17,$

$2x - 3y = 33,$ $\quad$ $4x + 2y = 46.$

3) $5x + 2y = 54,$
$8x - 5y = 29.$

4) $5x - 2y = 30,$
$-3x + y = -21.$

5) $15x + 13y = 97,$
$3x - 4y = -7.$

6) $10x - 9y = 14,$
$11x - 3y = 43.$

7) $13x + 15y = 153,$
$-2x - 3y = -27.$

8) $4x + y = -6,$
$16x + 3y = -15.$

9) $5x + 4y = 6,$
$20x - 12y = 3.$

10) $9x + 2y = 57,$
$-21x + 3y = 62\frac{1}{2}.$

11) $3{,}5x + 4{,}1y = 199,$
$14x - 3y = 20.$

12) $4{,}5x + 3{,}7y = 141{,}5,$
$13{,}5x - 5{,}9y = 84{,}5.$

13) $\frac{6}{x} + \frac{7}{y} = 5\frac{1}{2},$
$\frac{9}{x} - \frac{2}{y} = 2.$

14) $\frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 9,$
$\frac{2}{x} - \frac{3}{y} = -1\frac{1}{12}.$

15) $\frac{x+1}{y+1} = \frac{1}{2},$
$\frac{x+2}{y-2} = \frac{2}{3}.$

16) $\frac{3x+2y}{y+7} = 2\frac{1}{15},$
$\frac{5x-2y}{x-2} = 3.$

17) $\frac{9 - x - y}{2} = 25 - 7x - y,$

$13 - 3x + y = \frac{-17 + 11x + y}{3}.$

18) $\frac{x+7}{6} = 9 - \frac{3y-4}{2},$

$\frac{3x-1}{2} = \frac{2y-1}{3} + \frac{10}{3}.$

19) $\frac{3x+2y}{6} - \frac{4x+3y}{15} = \frac{4}{3},$

$\frac{8x - 7y}{11} - 5y + 3x = -2.$

20) $\frac{2x - y + 1}{4} + 3x = 6y - \frac{5x + y - 5}{3},$

$y + \frac{x+2y}{8} = 12 - \frac{4+x}{2}.$

21) $\frac{3x + 2y + 2}{4} = \frac{7x - y - 4}{2},$

$10y - \frac{7x+2y}{5} = \frac{10x + 9y}{4} + \frac{57}{4}.$

22) $\frac{5x + 4y + 1}{5} - \frac{3x - y - 1}{4} = \frac{8x - 4}{3} - \frac{12y - 2x - 2}{15}$,

$\frac{60}{3y + 3x - 13} = \frac{45}{y + x + 4}$

23) $\frac{30}{3x - y + 1} = \frac{45}{2x + y - 1}$,

$\frac{19}{3x + 4y - 1} = \frac{3}{5x - 3y - 1}$.

24) $\frac{4 \cdot (5x + 4y)}{7} - \frac{22{,}7 - (x + y)}{3} = 15$,

$\frac{100{,}75 - (10x - 6y) \cdot 4{,}5}{2} - \frac{x - y}{4} = 10{,}65 - (x + y)$.

25) $(x - 5)\left(\frac{y}{x} + 0{,}5\right) = y + 7{,}5$,

$(x + 9)\left(\frac{y}{x} - 0{,}6\right) = y - 9{,}9$.

b) Gleichungen mit allgemeinen Zahlen.

1) $x + y = m$,
$x - y = n$.

2) $x + y = 2m$,
$x - y = 2n$.

3) $x + ay = m$,
$bx + y = n$.

4) $ax + y = s$,
$x - dy = t$.

5) $ax + by = 1$,
$bx - ay = 0$.

6) $ax + by = m$,
$cx - dy = n$.

7) $\frac{x + y}{2} = m$,
$\frac{x - y}{2} = n$.

8) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a$,
$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = b$.

9) $\frac{x + m}{ay + b} = p$,
$\frac{d - x}{fy - g} = q$.

10) $\frac{m}{n + y} = \frac{n}{3m + x}$,
$mx + 2ny = p$.

11) $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = \frac{1}{c}$,
$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{p}$.

12) $\frac{a}{b + y} = \frac{b}{a - x}$,
$\frac{m}{n - x} = \frac{n}{m + y}$.

13) $x^2 - y^2 = m$,
$x - y = n$.

14) $x^2 - y^2 = m$,
$x + y = n$.

15) $\frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b}$,

$\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a-b}$.

16) $\frac{m+y}{x} + \frac{y}{n} = \frac{2y+p}{2n}$,

$\frac{y}{2x-m} = \frac{p}{2n} - 1$.

17) $(m+n)x - (m-n)y = 4mn$

$(m-n)x + (m+n)y = 2m^2 - 2n^2$.

c) Gleichungen mit Wurzelausdrücken.

1) $\sqrt{x+y} = 5$,

$\frac{x+4}{6} + y - 8 = 6$.

2) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 9$,

$2\sqrt{xy} - 65 = -y$.

3) $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{y}} = 19$,

$\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} = 1$.

4) $7\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 49$,

$3\sqrt{x} + 5\sqrt{y} = 50$.

5) $7\sqrt{x} - 15 = 5\sqrt{y} - 14$,

$3\sqrt{x} + 4\sqrt{y} = 5\sqrt{x} - 7\sqrt{y} + 38$.

6) $\sqrt{x+y+3} = \sqrt{2x-y+8}$,

$2y - 2 = \sqrt{4y^2 - (6x+2)}$.

7) $3\sqrt{8x-3y} - 5\sqrt{5x+3y} = -23$,

$5\sqrt{8x-3y} + 2\sqrt{5x+3y} = 34$.

II. Gleichungen mit drei Unbekannten.

a) Gleichungen mit bestimmten Zahlen.

1) $2x + 3y - 4z = -3$,

$5x - 2y + 3z = 16$,

$3x - 4y - z = -10$.

2) $3x - 2y + 4z = 32$,

$5x + 7y - 6z = 52$,

$-6x - 11y + 5z = -89$.

3) $-5x + 7y - 3z = -30$,

$3x - 2y + 5z = 74$,

$2x - 3y - 4z = -52$.

4) $5x - 3y - 2z = -5,$
$-6x + 5y + 3z = 33,$
$2x - y + 3z = 39.$

5) $18x - 15y + 11z = 21,$
$20x + 7y - 12z = -2,$
$-13x - 21y + 5z = -40.$

6) $3x + 4y + 2z = -20,$
$2x - 8y + 3z = -28,$
$x + 12y + z = 0.$

7) $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} - \frac{4}{z} = -3,$
$\frac{5}{x} - \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 29,$
$\frac{8}{x} + \frac{9}{y} - \frac{5}{z} = 34.$

8) $\frac{3}{x} + \frac{5}{y} - \frac{1}{z} = 28,$
$\frac{2}{x} - \frac{3}{y} + \frac{4}{z} = 18,$
$\frac{4}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = -4.$

9) $4x - 3y + 2z = 8,$
$3x - 2y + z = 6,$
$5x - 3y = 9.$

10) $4x - 3y + 2z = 15,$
$3x + y - 3z = 12,$
$5x - z = 23.$

11) $2x - 3y - z = -6,$
$5x + y + 3z = 72,$
$2y + z = 19.$

12) $x + y + z = 8,$
$4x - 3y = 0,$
$3x - 2z = 7.$

13) $3x - y + 2z = 8,$
$4x + 3y = 20,$
$2y + 3z = 17.$

14) $2x + 3y + 4z = 6,$
$4x + 5z = 5\frac{3}{4},$
$6y - z = 3\frac{1}{4}.$

15) $2x - y + 3z = 14,$
$x : 2y : 5z = 3 : 4 : 5.$

16) $4x - 3y + z = 4,$
$3x : 2y : 4z = 9 : 10 : 28.$

17) $x + y = 20,$
$x + z = 26,$
$y + z = 30.$

18) $3x + 2y = 18,$
$5x - 7z = 6,$
$6y - 5z = 8.$

19) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{9}{20}$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{5}{12}$, $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{11}{30}$.

20) $\frac{5}{x} + \frac{3}{y} = 37$, $\frac{2}{x} - \frac{1}{z} = 7$, $\frac{4}{y} - \frac{3}{z} = 7$.

21) $\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y - \frac{4}{5}z = 3$,
$\frac{3}{2}x + 1\frac{5}{8}y + z = 48$,
$2x - \frac{3}{2}y - 1\frac{3}{5}z = -24$.

22) $\frac{x+1}{8} + \frac{y-1}{10} = \frac{z+3}{2}$,
$\frac{x-1}{3} - \frac{y-5}{6} = \frac{z+7}{5}$,
$2x + 3y + 6z = 263$.

23) $\frac{3x - 2y + z}{3} - \frac{4x + y - 6z}{2} + 5 = \frac{x + y + 4z}{5}$,
$\frac{2x - 5y + 10z}{4} - \frac{5x - 6y - 2z}{3} + 2\frac{1}{2} = \frac{x + z}{2}$,
$\frac{6x - 7y + 32}{6} - \frac{2y + 5z}{3} - \frac{3y}{2} = \frac{3}{2}x - 2y - z$.

b) Gleichungen mit allgemeinen Zahlen.

1) $x + y = 2a$, $x + z = 2b$, $y + z = 2c$.

2) $x + y = a$, $x + z = b$, $y + z = c$.

3) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = b$, $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = c$.

4) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = a$, $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = b$, $\frac{1}{y} - \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = c$.

III. Gleichungen mit mehr als drei Unbekannten.

1) $4x - 3y + 2z - u = 10$,
$2x + 3y - z + 5u = 20$,
$5x - 4y + 3z - 2u = 12$,
$3x - 5y - z + 3u = -2$.

2) $x - y + z - u = 3,$
$3x - 2y - 5z + 2u = -1,$
$2x + 3y - 4z + 7u = 26,$
$5x + y - z + u = 33.$

3) $x + y = 18,$
$y + z = 16,$
$z + u = 11,$
$x - u = 3.$

4) $x + y + z = 30.$
$x + y + u = 42,$
$z + u = 28,$
$x - y = -2.$

5) $x + y + z = 21,$
$x + u + t = 17,$
$y + z + u = 18,$
$z + u + t = 15,$
$x + t = 12.$

6) $x + y = 13,$
$x + z = 15,$
$x + u = 17,$
$x + t = 20,$
$x + r = 25,$
$y + r = 28.$

7) $x + y + z = 9,$
$x + z + u = 11,$
$x + t + r = 15,$
$y + u + t = 8,$
$y + r - v = 2,$
$z + t - r = 3,$
$u + r + v = 20.$

8) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z + \frac{1}{5}u = 64,$
$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{6}z + \frac{1}{9}u = 43,$
$\frac{1}{5}x + \frac{1}{8}y + \frac{1}{12}z + \frac{1}{15}u = 24,$
$\frac{1}{6}x + \frac{1}{24}y + \frac{1}{18}z + \frac{1}{3}u = 29.$

§ 34. Aufstellung von Gleichungen für Textaufgaben und Auflösung derselben.

a) Aufgaben mit zwei Unbekannten.

Mündlich.

1) Die Summe zweier Zahlen beträgt 440 (616), ihre Differenz 110 (154); wie heißen diese Zahlen?

2) Die Differenz zweier Zahlen beträgt 276, ihr Quotient 5; wie heißen diese Zahlen?

3) Die Summe zweier Zahlen beträgt 584, ihr Quotient 7; wie heißen diese Zahlen?

4) Das 8fache einer Zahl ist gleich dem 5fachen einer andern, und das 9fache der ersten ist um 6 kleiner als das 6fache der zweiten. Wie heißen die zwei Zahlen?

5) Wird die eine von zwei Zahlen mit 3, die andere mit 7 multipliciert, so ist die Summe der Produkte 59. Wird aber die erste

mit 9, die zweite mit 12 multipliciert, so ist die Summe der Produkte 132. Wie heißen diese zwei Zahlen?

6) Die Summe zweier Zahlen beträgt 12 und die Differenz ihrer Quadrate 48. Wie heißen sie?

7) Jemand zahlt für 12 Pfund Kaffee und 10 Pfund Zucker 24 ℳ, und für 24 Pfund Kaffee und 15 Pfund Zucker 45,60 ℳ. Wieviel kostet das Pfund jeder Ware?

Schriftlich.

1) Vermehrt man eine gewisse Zahl um ihr Fünftel und eine andere um ihre Hälfte, so beträgt die Summe beider 45. Multipliciert man die erste mit 2, die zweite mit 3, so ist das erste Produkt um 24 kleiner als das letzte. Wie heißen diese beiden Zahlen?

2) Es gibt eine zweizifferige Zahl, deren Quersumme 15 beträgt. Schreibt man die Ziffern derselben in umgekehrter Ordnung, so entsteht eine Zahl, welche um 27 kleiner ist als die ursprüngliche. Wie heißt diese?

3) Verkleinert man die eine von zwei Zahlen um 12 und vergrößert die andre um 6, so wird das Produkt aus dieser Differenz und Summe um 144 kleiner als das Produkt der beiden Zahlen selbst. Vermehrt man aber die erste Zahl um 8 und vermindert die zweite um 14, so ist das Produkt dieser Summe und Differenz um 424 kleiner als das Produkt der beiden ursprünglichen Zahlen selbst. Wie heißen diese?

4) Addiert man zum Zähler eines gewissen Bruches 1, so wird der Wert des Bruches $\frac{1}{7}$, addiert man aber 1 zum Nenner, so wird der Wert desselben $\frac{1}{9}$. Welches ist dieser Bruch?

5) Wenn man zum Zähler und Nenner eines Bruches 3 addiert, so erhält er den Wert $\frac{4}{5}$; subtrahiert man aber vom Zähler und Nenner desselben 1, so wird sein Wert $\frac{2}{3}$. Wie heißt der Bruch?

6) Vermehrt man den Zähler und Nenner eines gewissen Bruches um 1, so wird der Wert des Bruches um $\frac{1}{28}$ größer; vermindert man aber Zähler und Nenner desselben um 2, so nimmt der Wert des Bruches um $\frac{4}{35}$ ab. Wie heißt dieser Bruch?

7) Die Differenz zweier Zahlen verhält sich zur Summe derselben wie 7 : 9 und zu ihrem Produkt wie 7 : 16. Wie heißen sie?

8) Gibt B dem A 75 ℳ, so hat A $3\frac{1}{4}$ mal so viel Geld als B; gibt aber A dem B 75 ℳ, so hat dieser $1\frac{3}{7}$ mal soviel als jener. Wieviel Geld hat jeder?

9) Zweierlei Sorten einer Ware kosten zusammen 130 ℳ. Würde die eine aber $1\frac{2}{5}$ mal, die andere $1\frac{3}{4}$ mal soviel kosten als ihr wirklicher Wert ist, so wären sie zusammen 203 ℳ wert. Wieviel kostet jede Sorte?

10) A war vor 3 Jahren 7 mal so alt, als B damals war und wird über 2 Jahre 4 mal so alt sein als B sein wird. Wie alt sind beide gegenwärtig?

11) Jemand hat 2 Fässer und in jedem eine gewisse Quantität Wein. Er gießt aus dem ersten Faß soviel in das zweite, als dieses bereits enthält; gießt hierauf wieder aus dem zweiten in das erste soviel, als nun in dem ersten ist, und endlich wieder aus dem ersten in das zweite soviel, als dieses noch enthält. Es findet sich nun, daß in jedem Fasse 24 l sind. Wieviel l waren anfänglich in jedem Fasse?

12) Ein zu einem gewissen Prozent auf Zinsen ausgeliehenes Kapital wächst innerhalb 8 Jahren mit den einfachen Zinsen auf 792 ℳ an. Trüge es 2 % Zinsen mehr, so würde es in 4 Jahren mit den Zinsen 744 ℳ betragen. Wie groß ist das Kapital und wieviel betragen die Zinsen?

13) A hat 3600 und 4400 ℳ zu einem gewissen Prozent ausgeliehen. B will, falls A ihm diese Kapitalien überläßt, im ganzen 60 ℳ mehr Zins geben. Zu wieviel Prozent sind die Kapitalien ausgeliehen und wieviel Prozent will B geben, wenn diese um $3\frac{3}{4}$ weniger betragen als das Doppelte der bisher von A bezogenen Prozente?

14) Der dritte Teil eines Kapitals zu 4 % und $\frac{2}{5}$ eines zweiten Kapitals zu 5 % geben zusammen in 6 Jahren 336 ℳ Zinsen. Der Rest des ersteren Kapitals zu 6 % und der Rest des zweiten zu 3 % geben zusammen in 7 Jahren 588 ℳ Zinsen. Wie groß ist jedes der beiden Kapitalien?

15) Von zwei Kapitalien geben $\frac{1}{4}$ ($\frac{1}{3}$) des ersteren zu 4 % (4 %) in 3 (3) Jahren und $\frac{3}{5}$ ($\frac{3}{5}$) des zweiten zu 5 % (5 %) in 2 (4) Jahren zusammen 198 (516) ℳ Zinsen. Der Rest des ersteren Kapitals zu 3 % ($3\frac{1}{2}$ %) in 5 ($4\frac{1}{2}$) Jahren und der Rest des zweiten zu 6 % (6 %) in 4 ($5\frac{1}{4}$) Jahren geben zusammen 420 (693) ℳ Zinsen. Wie groß ist jedes der beiden Kapitalien?

16) B hat 1600 ℳ mehr als A ausgeliehen und erhält $\frac{3}{4}$ % mehr als dieser, deshalb nimmt er jährlich 136 ℳ mehr Zins ein als A; C hat 2400 ℳ mehr ausstehen als B und erhält $\frac{1}{4}$ % mehr als dieser; aus diesem Grunde bezieht er jährlich 144 ℳ Zins mehr

als B. Wie groß ist das Kapital jeder dieser drei Personen und wieviel Prozent bezieht jede?

17) A entrichtet für eine gewisse Summe, die er nach 4 Monaten zu zahlen schuldig ist, nach Abrechnung eines gewissen Prozentsatzes für den jährlichen Diskonto 4648 *M*. B zahlt für eine gleiche Summe, die nach 9 Monaten fällig ist, bei demselben jährlichen Prozentsatze für den Diskonto 4458 *M*. Wieviel Mark waren beide zu zahlen schuldig, und wieviel Prozent betrug der jährliche Diskonto?

18) A und B geben zu einem gemeinschaftlichen Geschäfte zusammen 12000 *M* her. A läßt sein Geld 1 Jahr 3 Monate, B das seinige 1 Jahr 9 Monate stehen. Nach dieser Zeit war für beide der Gewinn gleich groß. Wie groß war die Einlage eines jeden?

19) Ein Kaufmann kauft ein Stück Tuch, das m zu $2\frac{1}{5}$ *M* ($2\frac{2}{5}$ *M*). Davon verkauft er später 180 m (200 m) zu einem gewissen Preis, den Rest aber zu $2\frac{2}{5}$ *M* ($2\frac{1}{2}$ *M*) das m und gewinnt dadurch 66 *M* (96 *M*). Hätte er 200 m (180 m) zu jenem Preise und den Rest zu $\frac{2}{5}$ *M* ($1\frac{4}{5}$ *M*) à m verkauft, so würde er 12 *M* (36 *M*) verloren haben. Wieviel m enthielt das Stück und was erhielt der Kaufmann für jedes der 180 m?

20) Ein Kaufmann A hat zweierlei Ware: die eine verkauft er mit 10 % Gewinn, die andere dagegen mit 12 % Verlust. Von beiden Waren setzt er eine bestimmte Quantität an einen Kaufmann B ab und erhält 32 *M* mehr als der Einkaufspreis der an denselben verkauften Ware beträgt. Einem andern Kaufmann C verkauft er von der ersten Ware dreimal soviel, und von der zweiten achtmal soviel, als er an B abgesetzt hat und erhält im ganzen 144 *M* weniger, als der Einkaufspreis beider Waren zusammen betrug. Wieviel hatte ihm B für jede der beiden Waren zu bezahlen?

21) Zwei Kaufleute, A und B, legten ihre Kapitalien zu einem gemeinschaftlichen Handel zusammen. Beim ersten gemeinschaftlichen Unternehmen gab A sein Kapital 5 Monate, B das seinige 6 Monate her; der Gewinn beider betrug 2280 *M*. Zu einem zweiten gemeinschaftlichen Handel gab A sein anfängliches Kapital auf 8 Monate, B das seinige auf 7 Monate her; hiedurch gewannen sie 3180 *M*. Zum drittenmal gab A sein Kapital und außerdem noch 600 *M* auf 4 Monate, B sein anfängliches Kapital auf 5 Monate ins Geschäft; der gemeinschaftliche Gewinn war 1908 *M*. Wie groß sind die erwähnten

Kapitalien des A und B, wenn der Gewinn bei allen drei Geschäften verhältnismäßig gleich groß war?

22) Ein Weinhändler hat zweierlei Wein. Vermischt er 3 l der schlechteren Sorte mit 2 l der besseren, so kann er das l der Mischung zu 2,82 ℳ verkaufen. Vermischt er aber 2 l der schlechteren Sorte mit 3 l der besseren, so muß er das l der Mischung zu 2,98 ℳ verkaufen. Wieviel kostet das l jeder Sorte?

23) Jemand hat 2 Sorten Silber; vermischt er 6 kg der einen Sorte mit 4 kg der andern, so erhält er Silber vom Feingehalte 0,695; vermischt er aber 4 kg der ersten Sorte mit 6 kg der zweiten, so erhält er Silber von dem Feingehalte 0,680. Von welchem Gehalte sind die beiden Silbersorten?

24) Zwei Silberbarren wiegen zusammen 40 kg und geben, wenn man sie zusammenschmelzt, Silber von dem Feingehalte 0,81. Der Feingehalt des ersten ist 0,9 und der des zweiten 0,75. Wieviel wiegt jedes dieser zwei Silberstücke?

25) Ein Wasserbehälter von 320 cdm kann durch 2 Röhren gefüllt werden. Wenn die eine Röhre 5, die andere 4 Stunden offen ist, so erhält man 73 cdm Wasser. Wenn aber die eine $7\frac{2}{3}$, die andere 6 Stunden offen ist, so erhält man 111 cdm. Wieviel cdm gibt jede Röhre in einer Stunde, und wie lange müssen beide zugleich offen sein, um den Behälter zu füllen?

26) Zwei Boten, A und B, gehen von 2 Städten, deren Entfernung 57 km beträgt, einander entgegen. Geht A 2 Stunden 24 Minuten früher ab, als B, so treffen sie in 5 Stunden nach Abgang des B zusammen. Geht aber B 5 Stunden 15 Minuten früher ab als A, so treffen sie in 4 Stunden nach Abgang des A zusammen. Wieviel km legt A und wieviel B in jeder Stunde zurück?

27) A und B übernehmen zusammen die Aufführung eines Gebäudes. Nachdem A mit seinen Leuten 21 Tage, B aber 7 Tage länger daran gearbeitet hatte, war erst der dritte Teil vollendet. Als endlich das Werk fertig war, zeigte sich, daß A 84 Tage und B 56 Tage daran hatte arbeiten lassen. Wie lange hätte jeder allein gebraucht, um diese Arbeit auszuführen?

28) Gibt B dem A soviel Zehnmarkstücke als A Zwanzigmarkstücke besitzt, so hat A $1\frac{4}{5}$ mal soviel Geld als B. Gibt dagegen A dem B 10 Zwanzigmarkstücke, so hat B $2\frac{1}{2}$ mal soviel Geld als A. Wieviel Zwanzigmarkstücke besitzt A und Zehnmarkstücke B?

29) Jemand besitzt eine gewisse Anzahl Zehnpfennig- und Fünfpfennigstücke, zusammen 45 Stück. Hätte er 40 Zehnpfennigstücke mehr und 5 Fünfpfennigstücke weniger, so würde er doppelt soviel Geld haben, als er jetzt hat. Wieviel Zehnpfennig- und Fünfpfennigstücke besitzt er?

30) Jemand gab, um eine Schuld von 5,05 ℳ abzutragen, 1 Zwanzigfrankstück, und erhielt 1 Dukaten und 1,75 ℳ zurück. Mit dem Dukaten und einem weiteren Zwanzigfrankstück bezahlte er sodann eine Schuld von 24,95 ℳ und erhielt 0,75 ℳ zurück. Wie hoch wurde das Zwanzigfrankstück und der Dukaten in deutschem Gelde gerechnet?

31) Von 2 eisernen Hohlkugeln ist die größere doppelt so schwer als die kleinere und faßt 3 kg Pulver mehr als diese. Mit Pulver gefüllt wiegt die größere Hohlkugel 49 kg, die kleinere 24 kg. Wieviel wiegt jede der leeren Kugeln, und wieviel die Pulverfüllung von jeder?

32) Eine Anzahl Personen fährt mit einem Extrazug von M nach dem 7 Meilen entfernten Ort N. Das Fahrgeld beträgt per Meile III. Klasse 0,45 ℳ, II. Klasse 0,60 ℳ und für alle zusammen 655,20 ℳ. Wieviel Personen fuhren III. und wieviel II. Klasse, wenn die Anzahl der Passagiere III. Klasse dreimal so groß war als die der II. Klasse?

33) A hatte sein Haus mit 70000 ℳ und sein Mobiliar mit 10000 ℳ versichert und mußte zusammen eine Prämie von 142,50 ℳ für das Jahr zahlen. Nachdem sich der Wert seines Hauses durch bauliche Änderungen um 20000 ℳ erhöht hatte und das Mobiliar durch Neuanschaffungen auf 12500 ℳ gebracht worden war, betrug die jährliche Gesamtprämie 182,5 ℳ. Wieviel pro Mille berechnet die Feuerversicherungsanstalt für das Haus und wieviel für das Mobiliar?

34) Ein Kaufmann hat sein Haus und Warenlager nach dem vollen Wert versichert und zahlt im ganzen 172,40 ℳ Prämie, von jenem nämlich $1\frac{1}{2}$ ‰, von diesem $1\frac{3}{4}$ ‰. Das Haus rentiert sich zu $4\frac{1}{2}$ %, das Warenlager dagegen wirft durchschnittlich $9\frac{3}{4}$ % Gewinn ab; daher ist der Gewinn aus dem letzteren in 3 Jahren 9 Monaten schon um 495 ℳ größer als die vierjährige Rente des ersteren. Wie hoch schlägt er den Wert seines Hauses, und wie hoch den seines Magazins an?

35) Eine Schlacht zwischen zwei Armeen A und B dauerte 2 Tage.

Am ersten Tage betrug der Verlust von A $\frac{1}{12}$ und der von B $\frac{1}{8}$ ihrer Mannschaft. Von der übrig gebliebenen Mannschaft verlor A am zweiten Tage $\frac{1}{10}$, B $\frac{1}{15}$. Der Gesamtverlust von A an den beiden Tagen verhielt sich zum Gesamtverlust von B wie 147 : 176, und B war nach der Schlacht um 9100 Mann stärker als A. Wie stark war jede Armee vor und nach der Schlacht?

36) A kaufte für 78000 ℳ 4prozentige Staatspapiere, B für die gleiche Summe $4\frac{1}{2}$ prozentige. Zur Zeit des Ankaufs dieser Papiere stand der Kurs derselben so, daß B 125 ℳ mehr Jahreszinsen davon bezog als A. Als in der Folgezeit beide Gattungen Staatspapiere um 3 % gestiegen waren, verkauften sie dieselben wieder. Dabei empfing A an Kapital 187,50 ℳ mehr als B. Zu welchem Kurs waren die Papiere eingekauft?

37) Von zwei Personen, M und N, welche gleichviel Vermögen besitzen, hat N sein Geld um $\frac{1}{2}$ % höher ausgeliehen als M. Wie groß ist das Vermögen einer jeden Person und zu wieviel % hat jede ihr Geld angelegt, wenn das Kapital des M in 7 Jahren 4 Monaten auf 6208 ℳ und das des N in 8 Jahren 9 Monaten auf 6690 ℳ anwächst?

38) M und N, welche zusammen 5900 ℳ Kapital ausgeliehen haben, nehmen in 5 Jahren $1227\frac{1}{2}$ ℳ Zinsen ein. Würde der Zinsfuß beider Kapitalien gewechselt, so betrüge der fünfjährige Zins $52\frac{1}{2}$ ℳ mehr. Zu wieviel % stehen beide Kapitalien auf Zinsen, wenn das Kapital des M um 2100 ℳ größer als das des N ist?

39) Multipliciert man von 4 Kapitalien das erste mit $\frac{3}{4}$, das zweite mit $\frac{4}{5}$, das dritte mit $\frac{6}{7}$ und das vierte mit $\frac{8}{9}$, so erhält man gleiche Produkte. Läßt man das erste Kapital $3\frac{1}{2}$ Jahre zu 4 %, das zweite eine gewisse Anzahl von Jahren zu $4\frac{1}{2}$ %, das dritte 4 Jahre zu $3\frac{3}{4}$ % und das vierte $4\frac{1}{4}$ Jahre zu 5 % auf Zinsen stehen, so bekommt man 1846,75 ℳ Zinsen. Man würde 1829,75 ℳ Gesamtzinsen erhalten, wenn das dritte Kapital 300 ℳ mehr betrüge und zu $\frac{1}{4}$ % höherem Zinsfuße auf eine um $\frac{3}{4}$ Jahre kürzere Zeit ausgeliehen wäre. Wie groß ist jedes Kapital und wie lange stand das zweite aus?

b) Aufgaben mit drei Unbekannten.

Schriftlich.

1) Die Summe dreier Zahlen ist 63; die Differenz der ersten und zweiten ist 5 und die Differenz der zweiten und dritten 2. Welche Zahlen sind es?

2) Die Summe dreier Zahlen beträgt 124. Addiert man zur ersten das Doppelte der zweiten und das Dreifache der dritten, so erhält man 240; subtrahiert man aber von der Summe der ersten und dem Vierfachen der zweiten das Zweifache der dritten, so bleibt 112. Wie heißen die 3 Zahlen?

3) Man soll die Zahl 100 so in 3 Teile zerlegen, daß, wenn man den ersten Teil durch den zweiten dividiert, 4 als Quotient und 5 als Rest herauskommt, wenn man aber den dritten Teil durch den zweiten dividiert, der Quotient 1 und der Rest 5 erscheint. Wie heißen die 3 Teile?

4) Man soll 3 Zahlen suchen, die folgenden Bedingungen genügen: vergrößert man die erste um 2 und vermindert die zweite um ebensoviel, so verhält sich jene Summe zu dieser Differenz wie 5 : 8; vermindert man aber die erste um 4 und vermehrt die zweite um 2, so verhält sich jene Differenz zu dieser Summe wie 1 : 5; vergrößert man endlich die zweite um den 5. Teil der dritten und vermindert die dritte um das $1\frac{1}{2}$ fache der ersten, so verhalten sich die resultierenden Zahlen wie 4 : 3. Wie heißen die 3 Zahlen?

5) Der Geburtstag Liebigs, des größten Chemikers der Neuzeit, läßt sich mit Hilfe der folgenden Angaben finden. Addiert man Datum, Monatszahl und Jahreszahl, so erhält man als Summe die Zahl 1821. Die Jahreszahl ist um 1790 größer als das Datum und um 1798 größer als die Monatszahl. Wann wurde Liebig geboren?

6) A und B besitzen zusammen 9960 *M*, A und C 15040 *M* und B und C 12000 *M*. Wieviel hat jeder?

7) Gibt A dem B die Hälfte seines Vermögens, so hat dieser 4mal soviel als A behält; gibt A dem C jene Hälfte, so bekommt dieser soviel als A vorher hatte; gibt endlich B dem C 2000 *M*, so haben B und C gleichviel. Wieviel hat jeder?

8) Drei Kapitalien stehen in dem Verhältnis 2 : 3 : 4. Das Dreifache des ersten Kapitals, das Zweifache des zweiten und das Vierfache des dritten betragen zusammen 42000 *M*. Wie groß ist jedes dieser 3 Kapitalien?

9) A pachtete einen Gasthof um den jährlichen Pachtzins von 1000 *M*. Die Renten des Gasthofes fielen aber im ersten Jahre so gering aus, daß dem Pächter nach Entrichtung der Steuern und nach Abzug der Ausgaben für seine Haushaltung noch 36 *M* fehlten, um den Pachtzins zu zahlen. Der Verpächter ließ ihm daher vom zweiten

Jahre an 5 % vom Pachtzins nach, und da der Reinertrag des Gasthofes gegen den des vorhergehenden Jahres sich um $\frac{1}{9}$ besser gestaltete, seine Ausgaben für die Haushaltung sich um $\frac{1}{10}$ vermindert hatten und außerdem auch die Steuern um $\frac{1}{18}$ herabgesetzt worden waren, so war der Pächter am Ende des zweiten Jahres in der Lage, nicht allein seine Schuld zu decken, sondern auch noch 260 ℳ zurückzulegen. Während des dritten Jahres erhöhte sich der Ertrag seiner Einnahmen noch um $\frac{1}{10}$ gegen das verflossene Jahr und obgleich nun gegen eben dieses Jahr die Ausgaben des Pächters für den Haushalt um $\frac{1}{18}$ und für Steuern um $\frac{1}{5}$ größer waren, so hatte er sich doch 449,20 ℳ erübrigt. Wieviel hat A im ersten Jahre für die Haushaltung, wieviel für Steuern gebraucht und wie groß war der Ertrag des Gasthofes im ersten Jahr?

10) Zu einer gewissen Arbeit werden drei Arbeiter verwendet. A und B würden diese Arbeit in 24 Tagen vollenden; B und C in 40 Tagen, A und C aber in 30 Tagen. Wieviel Tage wird jeder einzeln dazu brauchen, und in wieviel Tagen kann die Arbeit von den 3 Arbeitern gemeinschaftlich vollendet werden?

11) Ein Weinhändler hat aus drei Sorten, A, B und C, 360 l Wein so gemischt, daß darin diese Sorten im Verhältnisse 2 : 3 : 4 enthalten sind. Zu diesen 360 l setzte er nun 240 l einer andern, aus denselben drei Sorten bestehenden Mischung und erhielt so einen Wein, in welchem sich der Quantität nach die angeführten Sorten wie 9 : 10 : 11 verhielten. Wieviel von jeder der drei Sorten war in der zugesetzten Mischung enthalten?

12) Jemand hat nach 2, 4 und 6 Jahren gewisse Summen Geldes, welche zusammen 11940 ℳ ausmachen, heimzuzahlen. Wollte er gegen einen Rabatt von 5 % (auf Hundert) dieselben jetzt bar erlegen, so brauchte er nur 9900 ℳ, und würde er nach 2 Jahren bei gleichem Rabatt alles auf einmal erlegen, so müßte er 10800 ℳ zahlen. Wie groß sind diese Teilsummen?

13) In jedem von drei Körben, A, B und C, befindet sich eine gewisse Anzahl Äpfel. Legt man zu den Äpfeln in B und ebenso zu den Äpfeln in C $\frac{1}{3}$ der Äpfel von A, hierauf von der neu entstandenen Anzahl in B $\frac{1}{5}$ davon zu A und $\frac{1}{5}$ zu C, und endlich von der Anzahl die jetzt der Korb C enthält, $\frac{1}{7}$ zu A und $\frac{1}{7}$ zu B, so befinden sich in jedem Korbe gleichviel Äpfel, nämlich 60. Wieviel Äpfel waren ursprünglich in jedem Korbe?

14) Jemand besitzt 3 Gärten, die zusammen einen Wert von 9000 ℳ haben. Der erste wirft eine jährliche Rente von 8 %, der zweite von 5 %, und der dritte von 9 % ab. Der jährliche Nutzen aller 3 Gärten zusammen beträgt 650 ℳ, und zwar der vom ersten und zweiten Garten zusammen 290 ℳ mehr als vom dritten. Welchen Wert hat jeder Garten?

15) Die Quersumme einer dreizifferigen Zahl ist 15; zählt man bloß die Ziffern der Hunderter und Zehner zusammen, so erhält man 3 mehr als die Ziffer der Einer beträgt; schreibt man die Ziffern dieser Zahl in umgekehrter Ordnung, so entsteht eine Zahl, welche die ursprüngliche Zahl um 198 übertrifft. Wie heißt die ursprüngliche Zahl?

16) Ein Personenzug auf der Eisenbahnstrecke von A nach B hatte drei Wagenklassen. Der Erlös für die verkauften Billete betrug im ganzen 1492,40 ℳ, und zwar für die zweite Wagenklasse 188,60 ℳ mehr als für die erste, und 451 ℳ weniger als für die dritte. Jedes Billet erster Klasse kostet $1\frac{1}{2}$ mal soviel, als ein Billet zweiter Klasse und dreimal soviel als eines der dritten Klasse. a) Wieviel Personen befanden sich in jeder der drei Wagenklassen, wenn für die zweite Klasse 64 Billete mehr als für die erste, und für die dritte 320 mehr als für die zweite gelöst wurden? b) Wieviel betrug der Preis des Billets einer jeden Wagenklasse?

17) Jemand hat drei Kapitalien, die zusammen 15000 ℳ betragen, der Reihe nach zu 4, $4\frac{1}{2}$ und 5 % ausgeliehen und erhält von denselben jährlich 685 ℳ Zinsen. Würde er vom ersten Kapital 5, vom zweiten 4 und vom dritten $4\frac{1}{2}$ % bekommen, so erhielte er jährlich 15 ℳ weniger an Zinsen. Wie groß ist jedes Kapital?

B. Gleichungen des zweiten Grades.

I. Reine quadratische Gleichungen.

a) Mit einer Unbekannten.

§ 35. Aufgestellte und aufzustellende Gleichungen.

α) Aufgestellte Gleichungen.

Mündlich.

1) $x^2 = 144$.	2) $x^2 = 529$.	3) $x^2 = 625$.
4) $x^2 = 576$.	5) $x^2 = 2{,}25$.	6) $x^2 = 3{,}61$.
7) $x^2 = 20{,}25$.	8) $x^2 = 30{,}25$.	9) $3x^2 = 507$.

10) $8x^2 = 1568$. 11) $5x^2 = 7{,}2$. 12) $8x^2 = 20{,}48$.

13) $\frac{x^2}{6} = 54$. 14) $\frac{x^2}{8} = 60{,}5$. 15) $\frac{x}{3} \cdot \frac{x}{4} = 108$.

16) $\frac{x}{3} \cdot \frac{x}{8} = 96$. 17) $\frac{x}{3} \cdot \frac{x}{4} = 300$. 18) $\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = 864$.

19) $7x^2 - 23 = 4352$. 20) $5x^2 = 7605$. 21) $3x^2 = 46128$.

22) $7x^2 - 13 = 435$. 23) $8x^2 - 3 = 6x^2 + 5$.

Schriftlich.

1) $6x^2 - 72 = 592710{,}3744$.

2) $(3x + 5)(3x - 5) = 7x^2 + 25$.

3) $(7 - 2x)3x = (12 + 3x)5x - 39x - 84$.

4) $\frac{16}{6-x} = \frac{6+x}{x^2-2}$. 5) $\frac{x}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{25}{12}$.

6) $\frac{12}{x \quad 4} + \frac{11}{x+4} = \frac{23x - 29}{x^2 - 16} + 1$.

7) $ax^2 = b$. 8) $ax^2 - b = c$.

9) $a + x = \frac{2ab}{a - x}$. 10) $\frac{m^2 - x^2}{x^2 - n^2} = \frac{m}{n}$.

11) $\frac{m+x}{m-x} = \frac{x+n}{x-n}$. 12) $x = \frac{m + nx}{n + px}$.

13) $(m + x)(m - x) + n = px^2 + q$.

14) $\sqrt{85 - 12x} = 3x - 2$.

15) $\sqrt{32 + \sqrt{11 + \sqrt{5 + \sqrt{x^2 + 39}}}} = 6$.

β) Aufzustellende Gleichungen.

Mündlich.

1) Multipliciert man den 6ten und den 8ten Teil einer Zahl miteinander, so erhält man als Produkt 192. Wie heißt die Zahl?

2) Multipliciert man den 3ten und 4ten Teil einer Zahl miteinander und dividiert das Produkt durch 6, so erhält man 32. Wie heißt diese Zahl?

3) Jemand kauft eine gewisse Anzahl Pfund einer Ware und bezahlt für jedes Pfund soviel Pfennig, als er Pfund kauft. Wieviel Pfund kauft er, wenn er im ganzen 86,49 ℳ bezahlen muß?

4) Multipliciert man das $\frac{3}{4}$ fache einer gewissen Zahl mit ihrem $\frac{5}{6}$ fachen, so erhält man 1440. Welches ist diese Zahl?

5) Zur weiteren Übung können die Aufgaben des § 21, d benützt werden.

Schriftlich.

1. Algebraische und physikalische Aufgaben.

1) Die Barschaft dreier Personen A, B und C verhält sich zu einander wie 2 : 3 : 4. Multipliciert man die Anzahl der *M* des A mit der des B, die des B mit der des C, die des C mit der des A und addiert diese drei Produkte, so ergibt sich die Summe 3744 *M*. Wie groß ist die Barschaft eines jeden?

2) Ein Brunnen ist 100 m tief. Wieviel Zeit wird zwischen dem Augenblick, in welchem man einen Stein in denselben fallen läßt und dem verstreichen, in welchem man das Aufschlagen des Steines hört?

3) Zwei Reisende verlassen gleichzeitig denselben Ort. Der erstere legt täglich 4 Meilen zurück und reist nach Süden, der letztere $5\frac{1}{3}$ Meilen und reist gen Osten. Nach wieviel Tagen werden sie 40 Meilen voneinander entfernt sein?

4) Drei Zahlen verhalten sich wie 3 : 5 : 6. Welche Zahlen sind es, wenn die Summe ihrer Quadrate 2520 beträgt?

5) Jemand bezieht eine gewisse Anzahl Kilogramm Reis, $1\frac{1}{2}$ mal soviel Zucker und 8 mal soviel Kaffee, zusammen für 538 *M*. Für jedes Kilogramm einer Ware zahlt er doppelt soviel Pfennige, als die Ware Kilogramm hat. Wieviel Kilogramm von jeder Ware kaufte er?

6) Wenn man eine gewisse Zahl zu 85 addiert und dieselbe Zahl von 85 subtrahiert, so beträgt die Summe der positiven Quadratwurzeln aus beiden Ausdrücken 18. Welches ist diese Zahl?

7) S. Prüfungsaufgaben (Anhang II) Oberbayern 1896, Unterfranken 1891, 1.

2. Planimetrische Aufgaben.

Aufgaben der Planimetrie, welche auf reine quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten führen, finden sich in: Fuß, Sammlung von Konstruktions- und Rechenaufgaben aus der Planimetrie und Stereometrie, 2. Auflage, und zwar:

No. 17 Seite 16.	No. 9 Seite 21.	No. 10 Seite 21.
„ 15 „ 21.	„ 6 „ 23.	„ 3 „ 24.
„ 7 „ 25.	„ 7 „ 25.	„ 14 „ 32.
„ 10 „ 34.	„ 2 „ 34 u. s. w.	

b) Mit mehreren Unbekannten.

§ 36. Aufgestellte und aufzustellende Gleichungen.

α) Aufgestellte Gleichungen*).

1) 1) $x^2 + y^2 = 34.$
2) $x^2 - y^2 = 16.$

2) 1) $x^2 + y^2 = 164.$
2) $x^2 - y^2 = 36.$

3) 1) $8x^2 + y^2 = 121.$
2) $2x^2 + 3y^2 = 165.$

4) 1) $x^2 + y^2 = a.$
2) $x^2 - y^2 = b.$

5) 1) $xy = 192.$
2) $\frac{x}{y} = 3$

6) 1) $xy = a.$
2) $\frac{x}{y} = b.$

7) 1) $x + y = 14.$
2) $xy = 45.$

8) 1) $x + y = a.$
2) $xy = b.$

9) 1) $x - y = 8.$
2) $xy = 105.$

10) 1) $x - y = a.$
2) $xy = b.$

11) 1) $x + y = 8.$
2) $x^2 + y^2 = 34.$

12) 1) $x + y = a.$
2) $x^2 + y^2 = b.$

13) 1) $x - y = 15.$
2) $x^2 + y^2 = 425.$

14) 1) $xy = 3.$
2) $x^2 + y^2 = 10.$

15) 1) $x + y = 11.$
2) $x^2 - y^2 = 55.$

16) 1) $x - y = 16.$
2) $x^2 - y^2 = 384.$

17) 1) $x^4 - y^4 = 65.$
2) $x^2 - y^2 = 5.$

18) 1) $x^4 + y^4 = 97.$
2) $x^2 + y^2 = 13.$

19) 1) $x^3 + y^3 = 91.$
2) $x + y = 7.$

20) 1) $x^3 - y^3 = 56.$
2) $x^2 + xy + y^2 = 28.$

β) Aufzustellende Gleichungen.

1. Algebraische Aufgaben.

1) Das Produkt zweier Zahlen ist 72, ihr Quotient 2. Welches sind die beiden Zahlen?

2) Die Summe zweier Zahlen beträgt 14, die ihrer Quadrate 100. Welches sind diese Zahlen?

3) Addiert man zwei Zahlen, so erhält man 24, dividiert man die Summe ihrer Quadrate durch die Differenz der Zahlen, so resultiert 145. Welche Zahlen sind es?

---

*) Die leichteren der folgenden Aufgaben eignen sich zum freien Rechnen.

4) Die Summe der beiden mittleren Glieder einer geometrischen Proportion beträgt 10, die der äußeren 11 und die Summe der Quadrate aller vier Glieder 125. Wie heißt die Proportion?

2. Planimetrische und stereometrische Aufgaben.

Hieher gehörige Aufgaben finden sich in der S. 129 genannten Sammlung von Fuß; einige Beispiele:

No. 19 Seite 16.	No. 8 Seite 18.	No. 14 Seite 18.
„ 23 „ 19.	„ 13 „ 21.	„ 16 „ 21.
„ 16 „ 23.	„ 9—11 „ 26.	„ 6 „ 29.
„ 9 „ 29.	„ 20 „ 62 u. s. w.	

II. Gemischte quadratische Gleichungen.

a) Mit einer Unbekannten.

§ 37. Aufgestellte und aufzustellende Gleichungen.

α) Aufgestellte Gleichungen.

Mündlich

1) $x^2 + 6x = 40.$ 2) $x^2 + 8x = 65.$

3) $x^2 - 4x = 60.$ 4) $x^2 - 10x = 24.$

5) $x^2 = 112 - 6x.$ 6) $x^2 + 3x = 72 - 3x.$

7) $x^2 + 3x^2 - 3x + 4 = 52 + x.$

Schriftlich.

1) $x^2 - x = 6.$ 2) $x^2 - 4x = 96.$

3) $x^2 - 3x = 10.$ 4) $x^2 - 2x = 3.$

5) $x^2 + x = 56.$ 6) $x^2 + 5x = 104.$

7) $x^2 - 9x = -20.$ 8) $x^2 - 18x = -80.$

9) $x^2 + 8x = -15.$ 10) $x^2 + 12x = -35.$

11) $x^2 - (a + b)x + ab = 0.$

12) $x^2 + (a + b)x + ab = 0.$

13) $x^2 + 2ax = b.$ 14) $bx^2 + ax = c.$

15) $\frac{120}{x - 1} - \frac{120}{x} = 4.$ 16) $\frac{160}{x} - \frac{160}{x + 6} = 6.$

17) $\frac{x}{x - 1} - \frac{x}{x + 1} = \frac{5}{12}.$

18) $\frac{4}{x^2} = \frac{1}{(2 - x)^2}.$ 19) $\frac{4}{x^2} = \frac{1}{(12 - x)^2}.$

20) $\frac{x}{x-1} - \frac{x}{x+1} = \frac{a}{b}$.

21) $\frac{x}{2x - m} = \frac{2m}{3x - 3m}$.

22) $mx^2 + mp = nx + \frac{m^3p^2}{n^2}$.

23) $x + \sqrt{x + 11} = 9$. 24) $x - \sqrt{x + 1} = 11$.

25) $\sqrt{2x + 1} + \sqrt{7x + 8} = \sqrt{20x + 1}$.

26) $\frac{x^2}{2} + \frac{x^2 + 36x + 324}{3} = 2082$.

27) $x \cdot \frac{x + 45}{3} + (x + 25) \cdot \frac{2x + 90}{5} + (x + 40)$
$\cdot \frac{7x + 315}{15} = 90250$.

28) $\frac{x^2}{2}\sqrt{3} + 3hx = 0$.

29) $\frac{71089{,}2}{2{,}8} = \frac{27}{3}(x^2 + (x + 11)^2 + \sqrt{x^2 \cdot (x + 11)^2})$.

30) Zur weiteren Übung können die mit q bezeichneten Gleichungen (mit einer Unbekannten) der Absolutorialaufgaben der bayerischen humanistischen Gymnasien und Realschulen (Anhang II) benützt werden.

β) Aufzustellende Gleichungen.

1. Aufgaben der Algebra und Physik.

1) Welche Zahl ist um 117306 kleiner als ihr Quadrat?

2) Unter eine gewisse Anzahl von Familien wurden 2816 *M* zu gleichen Teilen verteilt, und zwar erhielt jede derselben 20 *M* weniger, als es Familien waren. Wieviel Familien waren es und wieviel *M* erhielt jede?

3) Jemand kaufte eine Uhr und bezahlte dafür eine gewisse Summe; später verkaufte er dieselbe wieder um 39 *M*, und gewann hiedurch so viele Prozente als die Uhr *M* gekostet hatte. Wie hoch kam sie im Einkauf?

4) Ein Wohlthäter verteilte unter 80 dürftige Knaben und Mädchen seiner Stadt 2376 *M* so, daß ein Mädchen 6 *M* mehr erhielt als ein Knabe. Auf diese Weise bekamen sämtliche Knaben ebensoviel als sämtliche Mädchen. Wieviel Knaben und wieviel Mädchen wurden bedacht und wieviel erhielt je ein Mädchen und ein Knabe?

5) Ein Kaufmann kauft eine gewisse Anzahl Zentner Waren für 360 *M*. Für dieselbe Summe kauft er ein anderesmal von derselben Ware, erhält aber, weil indessen jeder Zentner um 1 *M* im Preise gestiegen ist, 4 Zentner weniger, als er früher erhalten hatte. Wieviel Zentner kaufte er das erste Mal ein?

6) A und B gaben zu einem gemeinschaftlichen Unternehmen 2400 *M* her. A ließ sein Geld 9 Monate stehen und erhielt an Einlage und Gewinn 1648 *M*. B ließ das seinige 12 Monate stehen und erhielt an Einlage und Gewinn 832 *M*. Wieviel hatte jeder eingelegt?

7) Ein Kaufmann kauft für 160 *M* Reis und für die gleiche Summe Kaffee und erhält 300 Pfund Reis mehr als Kaffee. In der Folge verkauft er 45 Pfund Kaffee und 80 Pfund Reis zusammen um 124,80 *M*, wodurch er 20 % gewinnt. Wieviel Pfund Kaffee und Reis hat er eingekauft?

8) Man läßt einen Stein in eine Grube fallen und hört ihn nach 6 Sekunden aufschlagen; wie tief ist dieselbe?

9) Jemand legt in eine Sparkasse kurz vor Beginn des Rechnungsjahres 75 *M*. Kurz nach Ablauf des zweiten Jahres nimmt er, ohne die Zinsen des ersten Jahres erhoben zu haben, Kapital mit den Zinsen zurück und erhält zusammen 81,12 *M*. Wieviel % wurden berechnet?

10) Aus einem Fasse, welches 300 Liter reinen Weingeist enthält, wird eine gewisse Zahl von Litern herausgenommen und dafür ebensoviel Wasser zugesetzt. Nachdem der Inhalt des Fasses gehörig durcheinander gemischt ist, schöpft man 30 Liter mehr als das erste Mal heraus und füllt das Faß wieder mit Wasser an. Es findet sich nun, daß die im Fasse enthaltene Mischung 72 prozentig ist. Wieviel Liter Weingeist hat man das erste Mal herausgenommen?

11) Unter 36 Knaben und Mädchen werden 720 *M* so verteilt, daß die Knaben die Hälfte der ganzen Summe bekommen, jeder einzelne Knabe aber 15 *M* mehr als ein Mädchen erhält. Wieviel Knaben und Mädchen sind es?

12) Der reine Einkaufspreis einer Ware beträgt 2000 *M*; derselbe stellt sich jedoch auf 2310 *M*, nachdem man die Bezugsspesen und Verkaufsspesen (letztere werden vom Gesamteinkaufspreis berechnet) zu diesem Preise hinzugerechnet hat. Wieviel betragen diese Spesen, wenn die letzteren der Prozentzahl nach die Hälfte der ersteren sind?

13) Jemand leiht 3600 ℳ zu einem gewissen Prozentsatz aus. Nach dem ersten Jahre nimmt er 80 ℳ von den fälligen Zinsen weg und schlägt den Rest derselben zum Kapital. Dasselbe thut er am Ende des zweiten Jahres, und nun beträgt sein Kapital 3805 ℳ. Zu wieviel % ist das Kapital ausgeliehen?

14) Der zweite Kursus einer Schule hat 6 Schüler mehr als der erste, und der dritte 14 mehr als der zweite. Alle 3 Kurse sammeln zu einem wohlthätigen Zweck; der erste Kursus bringt 12 ℳ, der zweite 18 ℳ und der dritte 45 ℳ zusammen. Wieviel Schüler sind in jedem Kursus, wenn jeder Schüler in jedem einzelnen Kursus zwar gleichviel, aber ein Schüler des ersten und zweiten Kurses zusammen soviel, als ein Schüler des dritten Kurses gibt?

15) Die Lösung der mit (q.) bezeichneten Prüfungsaufgaben (Anhang II) führt auf gemischte quadratische Gleichungen; diese können daher ebenfalls zur weiteren Übung herangezogen werden, z. B. Rheinpfalz 1884, 1885 ꝛc.

2. Aufgaben der Planimetrie und Stereometrie.

Geometrische Aufgaben, deren Lösung auf eine gemischte quadratische Gleichung mit einer Unbekannten führt, enthält meine Sammlung geometrischer Aufgaben, 2. Auflage, in großer Zahl; hier einige Beispiele:

No. 2 Seite 2.	No. 1—4 Seite 7.	No. 5 Seite 17.
„ 12, 13, 14, 17 Seite 18.	„ 22, 23, 24 Seite 19.	„ 26 „ 20.
„ 12 Seite 22.	„ 16 Seite 23.	„ 4 „ 24.
„ 9, 10 Seite 26.	„ 6 „ 29.	„ 14, 15 „ 43.
„ 16 Seite 57.	„ 13 „ 69 u. s. w.	

b) Mit mehreren Unbekannten

§ 38. Aufgestellte und aufzustellende Gleichungen.

Vorbemerkung. Alle Gleichungen des 2. Grades mit mehreren Unbekannten, die § 36 enthält, führen, in umsichtiger Weise behandelt, zu reinquadratischen Gleichungen. Manche derselben lassen sich aber auch, namentlich bei Anwendung der Substitutionsmethode, als gemischte quadratische Gleichungen auflösen. Die Auflösung der in diesem Paragraphen enthaltenen Beispiele führt in der Regel auf gemischtquadratische Gleichungen.

1) 1) $3x - 2y = 13.$ **2**) 1) $x + 2y = 26.$

2) $xy = 28.$ 2) $y^2 - 6x = 6y + 4.$

3) Die Zahl 13 soll so in zwei Teile zerlegt werden, daß die Summe der Kuben dieser Teile 855 beträgt; welches sind diese Teile?

4) Die Summe der Quadrate zweier Zahlen ist um 1 größer als das doppelte Produkt dieser Zahlen; das Dreifache der ersten Zahl ist um 7 größer als das Zweifache der zweiten Zahl. Welche Zahlen sind das?

5) Von welchen zwei Zahlen ist das Produkt gleich dem Vierfachen ihrer Summe, und die Quadratsumme gleich 180?

6) S. Prüfungsaufgaben (Anhang II) Rheinpfalz 1886, 1887 und 1890. Auch die mit q bezeichneten Gleichungen (mit zwei Unbekannten) der Absolutorialaufgaben der bayerischen Realschulen und humanistischen Gymnasien können zur Übung benützt werden.

III. Gleichungen höheren Grades, welche sich auf quadratische zurückführen lassen.

§ 39. Aufgestellte und aufzustellende Gleichungen.

1) $x^4 - 20x^2 = -64.$ 2) $x^4 + 6x^2 - 40 = 0.$

3) $x^6 + 4x^3 - 96 = 0.$ 4) $8x^6 - 65x^3 = -8.$

5) $\frac{x}{4}\sqrt{40000 - x^2} = 4800.$

6) Der Inhalt eines Dreieckes beträgt 66 qm, 2 Seiten desselben messen 11 m und 13 m; wie lang ist die dritte Seite?

C. Gleichungen des dritten Grades.

Reine kubische Gleichungen.

§ 40. Aufgestellte und aufzustellende Gleichungen.

Mündlich.

1) $x^3 + 8 = 35.$ 2) $x^3 - 5 = 120.$

3) $x^3 - 343 = 0.$ 4) $x^3 - 42 = 390 - x^3.$

5) $x^2 \cdot \frac{x}{4} = 128.$ 6) $\frac{x}{3} \cdot \frac{x}{9} \cdot \frac{x}{27} = 27.$

7) $x^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$

8) $x^3 - 8m^3 - 36m^2n - 54mn^2 - 27n^3 = 0.$

9) $x \cdot x \cdot \frac{x}{2} - 6 = 858.$

10) Zur weiteren Übung können die Aufgaben unter d des Paragraphen 22 benützt werden.

Schriftlich.

Aufgaben der Algebra.

1) $x^3 - 1 = 0.$ 2) $x^3 + 1 = 0.$

3) $5x^3 + 8x^2 - 4x + 5 = 4x(2x - 1) + 630.$

4) Multipliciert man den dritten, vierten und achten Teil einer gewissen Zahl miteinander, so erhält man 3161088; wie heißt diese Zahl?

5) Multipliciert man eine gewisse Zahl mit ihrem Viertel und das erhaltene Produkt mit ihrem Sechstel, so erhält man 16342632; welches ist diese Zahl?

6) Wenn man das Quadrat einer gewissen Zahl in die 3. Potenz erhebt, so erhält man 24794911296; wie heißt diese Zahl?

Aufgaben der Stereometrie.

Stereometrische Aufgaben, die durch rein kubische Gleichungen gelöst werden können, finden sich in meiner schon oben (S. 129) genannten Sammlung, nämlich:

No. 9 Seite 54.	No. 12 Seite 55.	No. 7 Seite 56.
„ 12 u. 17 „ 57.	„ 6 „ 60.	„ 8 „ 60.
„ 7 „ 73.	„ 16 „ 81.	„ 16, 3 u. 7 S. 87.
„ 11 „ 88 u. s. w.		

Anhang I.

Vermischte Aufgaben *).

Mündlich.

1) Multipliciert man die Hälfte einer Zahl mit ihrem Drittel und dividiert das Produkt durch 4, so erhält man $73\frac{1}{2}$; welches ist diese Zahl?

2) In welcher Zeit legt ein freifallender Körper 980 m zurück?

3) Multipliciert man die Hälfte einer Zahl mit ihrem Drittel und Viertel und dividiert das Produkt durch 3, so erhält man 81; wie heißt diese Zahl?

4) Wieviel Grade nach C sind + 20° F?

5) Wieviel Grade nach R sind — 25° F?

6) Wieviel Schwingungen kommen dem $\bar{a}$ nach der Potenzenstimmung zu?

7) Wieviel Schwingungen macht das $\bar{c}$ nach der Pariser Stimmung?

8) Wie groß ist die lebendige Kraft eines Körpers, der 600 m Geschwindigkeit hat und 50 g wiegt?

9) Wieviel Schwingungen macht das $\bar{f}$ nach der Potenzenstimmung?

10) Wieviel wiegen 675 Pfund $CaCO_3$ nach dem Brennen?

11) Wieviel kg Kork, spez. Gew. = 0,25, müssen mit 1 kg Silber, spez. Gew. = 10, verbunden werden, damit beide Körper im Wasser schweben?

12) Man will 67,2 kg Messing (spez. Gew. = 8,4) im Wasser mit Kork (spez. Gew. = 0,25) heben; wieviel kg sind dazu erforderlich?

13) Ein Stück Tannenholz (spez. Gew. = 0,6) von 65 ccm Volumen ist ganz in Alkohol (spez. Gew. = 0,8) eingetaucht. Wie groß ist seine Steigkraft?

14) Bei dem Meteorfall zu Madrid am 10. Februar 1896 verlief nach den Beobachtungen der dortigen Sternwarte zwischen dem Aufstrahlen und der Detonation eine Zeit von $1\frac{1}{2}$ Minuten. In welcher Höhe fand die Explosion statt?

---

*) Die folgenden Aufgaben eignen sich besonders zu Wiederholungen des Gesamtpensums.

15) Ein Stein, den man in einen Brunnen fallen läßt, schlägt nach 6 (8) Sekunden am Boden auf; welche annähernde Tiefe hat der Brunnen? (g = 9,8 m).

16) Ein Luftschiffer ließ in einer Höhe von 3125 m (288,5 m) über dem Boden einen Stein fallen; nach wieviel Sekunden wird der Stein unten ankommen? (g = 10 m; vom Luftdruck abgesehen.)

17) Ein freifallender Körper kommt mit einer Geschwindigkeit von 88,2 m an der Erdoberfläche an; welchen Weg hat er durchmessen? (g = 9,8 m).

18) Eine Person vom spez. Gewicht 1,1 wiegt 66 kg; wieviel kg Korkholz vom spez. Gewicht 0,25 sind zu einem Schwimmpanzer erforderlich, der diese Person im Wasser trägt?

19) Ein rechteckiger schwimmender Körper ist 1,2 m lang, 0,8 m breit und 0,5 m dick und taucht mit $\frac{1}{5}$ seines Volumens im Wasser ein; wie schwer ist er?

20) Ein Körper wird mit einer Geschwindigkeit von 88,2 m senkrecht in die Höhe geschossen; wie hoch steigt er (vom Widerstand der Luft abgesehen)? (g = 9,8).

21) Ein Körper von 212 kg Gewicht trifft mit einer Geschwindigkeit von 100 m auf einen anderen festen Körper; welche Wärme entwickelt er?

22) Man übergießt 4 kg Eis von 0° mit 5 kg siedendem Wasser; welche Temperatur hat das Gemisch?

23) Man mischt 1 kg Eisenfeile von 37° und 1 kg Wasser von 7°; das Gemisch hat eine Temperatur von 10°; welches ist hiernach die spezifische Wärme des Eisens?

24) Durch einen Kanal fließt in jeder Sekunde eine Wassermenge von 4 cbm mit einer Geschwindigkeit von 10 m; wie groß ist der Effekt dieses Gewässers?

25) Bei einem Wasserfalle stürzen in jeder Minute 180 cbm Wasser in eine Tiefe von 45 m. Wie vielen Pferdestärken ist der Effekt des Falles gleich?

26) Auf einen Punkt wirken zwei Kräfte von 9 kg und 40 kg, welche einen rechten Winkel einschließen; wie groß ist die Resultante?

27) Von zwei Kräften, die rechtwinklig auf einen Punkt wirken, ist die eine 60 kg; wie groß ist die andere, wenn die Resultante 61 kg beträgt?

28) Ein gewöhnlicher Flaschenzug besteht aus 4 festen und 4

beweglichen Rollen, und die Lastflasche wiegt 8 kg; welche Kraft hält daran einer Last von 3792 kg das Gleichgewicht?

29) Man berechne schnell:

1) $34 \cdot 26$; 2) $77^2 - 23^2$;

3) $187^2 - 13^2$; 4) $\sqrt{32 \cdot 98}$;

5) $\sqrt{5x + 16} = 9$; 6) $x^2 + 2x = 35$;

7) $\sqrt{72} + \sqrt{200} + \sqrt{32}$; 8) $\sqrt[2]{3} \cdot \sqrt[3]{2}$;

9) $\frac{9}{\sqrt{3}}$; 10) $\frac{2}{2 + \sqrt{3}}$.

30) An einem Potenzflaschenzug soll mit einer Kraft von 40 kg eine Last von 2560 kg gehoben werden; wieviel bewegliche Rollen muß er haben? (Ohne Rücksicht auf das Gewicht.)

31) Auf einer schiefen Ebene soll ein Mann von 36 kg Zugkraft eine Last von 1440 kg fortbewegen; wieviel $^0/_0$ darf die Steigung betragen?

32) Ein Mann von 80 kg Gewicht trägt eine Last von 30 kg auf die Plattform eines kegelförmigen Hügels, auf die 100 Stufen von 20 cm Höhe führen; welche Arbeit produziert dieser Mann? Man drücke sie auch in Pferdestärken aus!

33) Eine Gasmenge nimmt unter einem Druck von 700 mm ein Volumen von 114 ccm ein; wie groß ist ihr Volumen unter einem Druck von 760 mm?

34) Man erwärmt 200 ccm Gas von 0^0 bei unverändertem Druck auf 100^0; welches Volumen nimmt es dann ein?

35) Ein rechteckiges Gefäß von 0,5 m Breite und 1,5 m Länge ist bis zu einer Höhe von 2,5 m mit Wasser gefüllt; welchen Druck hat der Boden auszuhalten?

36) An einer 20 m breiten Schleuse steht das Wasser 3,5 m hoch; wie groß ist der Seitendruck?

37) Wie groß ist ein Druck von 50 Atmosphären?

38 Man mischt 1 kg Eisenfeile von 50^0 und 1 kg Wasser von 30^0; welche Temperatur hat das Gemisch?

39) Es werden 6 kg Wasser von 54^0 und 6 kg Quecksilber von 85^0 miteinander gemischt; welches ist die Mischungstemperatur?

Schriftlich.

1) Vier Kapitalien, von denen das erste zum zweiten wie 2 : 3, das zweite zum dritten wie 6 : 7, das dritte zum vierten wie 1 : $1\frac{1}{3}$ sich verhält, tragen zusammen 4320 ℳ Zinsen, wenn das erste Kapital 4 Jahre zu $4\frac{1}{2}$ %, das zweite 6 Jahre zu $3\frac{3}{4}$ %, das dritte 4 Jahre zu $4\frac{3}{4}$ % und das vierte 3 Jahre zu 5 % aussteht. Wie groß ist jedes Kapital?

2) Zu einem Geschäfte wurden 450000 ℳ verwendet; damit hätte man 15 % gewonnen, wenn nicht gegen Ende des Unternehmens 5600 ℳ verloren worden wären. Wieviel Prozent wirft das Geschäft jetzt noch ab?

3) Ein Kapital steht zu 5 % auf Zinsen. Multipliciert man die Anzahl der ℳ des Kapitals mit der Anzahl der ℳ der 7monatlichen Zinsen, so erhält man 37800000. Wie heißt das Kapital?

4) Wenn man den 3ten, 4ten und 6ten Teil einer gewissen Zahl miteinander multipliciert, so erhält man $\sqrt{26873856}$; wie heißt die Zahl?

5) $\sqrt{\frac{9a^2b^2}{16} - \frac{5abcd}{4} + \frac{25c^2d^2}{36} + \frac{3abe}{4} - \frac{5cde}{6} + \frac{e^2}{4}} = ?$

6) $\frac{3x + 2y}{6} - \frac{4x + 3y}{15} = \frac{4}{3}$,

$\frac{8x - 7y}{11} - 5y + 3x = -2.$

7) $\frac{x + 1}{8} + \frac{y - 1}{10} = \frac{z + 3}{2}$,

$\frac{x - 1}{3} - \frac{y - 5}{6} = \frac{z + 7}{5}$,

$2x + 3y + 6z = 263.$

8) $\sqrt{6891,324196}$. 9) $\sqrt{105797,320225}$

10) $\sqrt[3]{43651,389761}$. 11) $\sqrt[3]{250,523582464}$.

12) $(11a^2b^3 - 2ab^4 - 6a^5 + 13a^4b - 28a^3b^2 - 24b^5) : (2a^2 - 3ab + 4b^2) = ?$

13) In jedem von 4 Tellern befindet sich eine gewisse Anzahl Nüsse. Legt man aus dem ersten Teller soviel Nüsse in den zweiten, als schon in diesem enthalten waren, darauf aus dem zweiten Teller soviel Nüsse in den dritten, als sich in diesem befanden und dann aus

dem dritten in den vierten soviel, als schon der vierte enthielt, so enthält jeder Teller gleichviel, nämlich 32; wieviel Nüsse waren ursprünglich in jedem Teller?

14) 2 Personen A und B legen zu einem gemeinschaftlichen Unternehmen Geld zusammen und zwar verhält sich die Einlage des A zu der des B wie 3 : 4. Nach dreijähriger Beteiligung beträgt die Einlage und der Gewinnanteil des A zusammen 5400 ℳ. Wieviel hat jede Person eingelegt und wie lange ließ B seine Einlage im Geschäft, wenn dasselbe $16\frac{2}{3}$ % abwirft und sich der Gewinnanteil des B zu dem des A wie 11 : 9 verhält?

15) Ein Körper, welcher aus zwei Stoffen A und B zusammengesetzt ist, wiegt a Kilogramm und verliert im Wasser p Kilogramm. Vom Körper A verlieren b Kilogramm im Wasser m Kilogramm und vom Körper B verlieren c Kilogramm n Kilogramm. Wieviel Kilogramm von jedem Stoffe befinden sich in dem Körper?

16) Wieviel Pfund Blei und Korkholz muß man verbinden, um einen 80 Pfund schweren Körper zu erhalten, der dasselbe Volumen hat, wie ein gleichschwerer Körper aus Tannenholz? (11,324; 0,24; 0,45).

17) Das Vorderrad eines Wagens hat auf einer gewissen Strecke 2160 Umdrehungen mehr gemacht als das Hinterrad. Wieviel Umdrehungen machte jedes Rad, und wie groß war die Strecke, wenn der Umfang eines Vorderrades 2,17 m und der eines Hinterrades 2,53 m betrug?

18) Ein Kapitalist legte ein bisher zu $4\frac{3}{4}$ % ausgeliehenes Kapital, dessen $2\frac{1}{2}$ jährige Zinsen 5700 ℳ betrugen, in Aktien im Kurs zu 125 an. Dieselben brachten im ersten Jahre $4\frac{1}{2}$ %, im zweiten $5\frac{3}{4}$ % und im dritten Jahr $8\frac{7}{8}$ % Dividenden. Hat er während dieser Zeit durch die zweite Anlage seines Kapitals gewonnen oder verloren und wieviel?

19) Drei Kaufleute A, B und C betrieben 3 Jahre lang ein Kompagniegeschäft und gewannen dabei zusammen 6987,75 ℳ. A legte bei Eröffnung desselben 4000 ℳ und nach 4 Monaten noch 3000 ℳ ein. B trat erst 12 Monate nach Eröffnung des Geschäftes bei und beteiligte sich daran mit 5000 ℳ und 4 Monate später noch mit 1800 ℳ. Wieder 4 Monate später trat C ein und trug 3000 ℳ bei und 4 Monate darnach noch 1500 ℳ. Wieviel erhielt jeder vom Gewinn?

20) Jemand beteiligte sich an einem Geschäft mit 36000 ℳ.

Hievon besaß er selbst 24000 ℳ, den Rest aber nahm er zu einem niedrigeren Zinsfuß auf, als das Geschäft abwarf. Auf diese Weise erzielte er einen Überschuß von 1680 ℳ an jährlichen Zinsen. Unter denselben Bedingungen machte er später ein ähnliches Geschäft und beteiligte sich an demselben mit 42000 ℳ eigenem und 18000 ℳ aufgenommenem Gelde. Hiebei ergab sich ein Überschuß von 2880 ℳ an jährlichen Zinsen. Wieviel % gab er, und wieviel erhielt er?

21) Eine geometrische Proportion hat folgende Beschaffenheit. Die Summe des 2. und 3. Gliedes beträgt 472; die Differenz zwischen dem 3. und 4. Glied ist 396, und das 1. Glied verhält sich zum 2. wie 3 : 7. Wie heißt diese Proportion? (Mit mehreren Unbekannten zu lösen!)

22) Jemand kauft ein Gut um 80000 ℳ und verpflichtet sich, 30000 ℳ bar, 25000 ℳ nach 2 Jahren, 20000 ℳ nach 4 Jahren und den Rest nach 6 Jahren zu zahlen. Wann kann er die Kaufsumme auf einmal erlegen, wenn ein Diskont von 5 % gerechnet wird und zwar a) auf 100, b) von 100?

23) Ein Ökonom besaß eine gewisse Anzahl ha Wiesenland und vertauschte davon $\frac{1}{3}$ derselben gegen Weinberg, $\frac{1}{5}$ derselben gegen Waldungen und $\frac{1}{7}$ gegen Ackerland. Nach dieser Vertauschung war er im ganzen im Besitz von 941 ha Land. Wieviel ha Wiesen besaß der Ökonom vor der Vertauschung, wenn 5 ha Wiesen denselben Wert wie 2 ha Weinberg, 6 ha Weinberg denselben Wert wie 35 ha Wald und 5 ha Wald denselben Wert wie 3 ha Ackerland haben?

24) 4 Personen betrieben gemeinsam ein Geschäft. B gab 600 ℳ weniger dazu, als A, C $\frac{2}{3}$ mal soviel als B, und D 900 ℳ. Von dem Gewinn, der 1938 ℳ betrug, erhielt B 547,20 ℳ. Wieviel hatte jede Person eingelegt, und wieviel gewann jede, wenn A sein Geld 7 Monate, B 8 Monate, C 9 Monate und D 10 Monate im Geschäft ließ?

25) Jemand hat ein Kapital in 3 Teilen ausgeliehen. Der erste Teil steht 3 Jahre lang zu 4 % aus. Der zweite Teil, der um 300 ℳ größer ist, als das $\frac{4}{5}$ fache des ersten Teiles, ist 6 Jahre lang zu 5 % ausgeliehen. Der dritte Teil, der 60 ℳ mehr, als das $\frac{3}{10}$ fache der beiden ersten Teile zusammen beträgt, steht 9 Jahre lang zu $4\frac{1}{2}$ % aus. Kapital und sämtliche Zinsen betragen zusammen 7897,50 ℳ. Wie groß sind die 3 Teile des Kapitals?

26) Ein Kaufmann nahm von seinem Betriebskapital jährlich

1000 ℳ weg, vermehrte aber den Rest durch ein rentables Geschäft durchschnittlich um 20 %. Nachdem er dies 4 Jahre lang fortgesetzt hatte, besaß er das Doppelte seines anfänglichen Vermögens weniger 3792 ℳ. Wie groß war das anfängliche Kapital?

27) Eine Feuerversicherungsanstalt bezog für ein mit 120000 ℳ versichertes Haus und das mit 16000 ℳ versicherte Mobiliar zusammen eine Prämie von 178 ℳ jährlich. Nachdem das Haus eine Reparatur im Werte von 6400 ℳ erhalten hatte und das Mobiliar durch neue Anschaffungen auf einen Wert von 18200 ℳ gebracht worden war, betrug die Gesamtprämie nunmehr jährlich 189,85 ℳ. Wieviel ‰ (pro Mille) berechnet die Anstalt für Gebäude und wieviel für Mobiliar?

28) A hat ein gewisses Kapital auf Zinsen stehen. Wäre dasselbe um 1200 ℳ größer, stände aber $\frac{1}{2}$ % niedriger, so bekäme er jährlich 12 ℳ Zinsen weniger. Wäre dagegen das Kapital 600 ℳ kleiner, stände aber $\frac{1}{2}$ % höher, so erhielte er jährlich 30 ℳ Zinsen mehr. Wie groß ist das Kapital und wieviel betragen die Prozente?

29) Jemand nimmt von seinem Gelde jährlich 2080 ℳ Zinsen ein. Die Hälfte des Kapitals trägt $\frac{1}{2}$ % weniger als der dritte Teil desselben und 1 % weniger als der Rest. Stände jeder dieser drei Teile $\frac{1}{2}$ % höher, so würden die jährlichen Zinsen zusammen 240 ℳ mehr betragen. Wie groß ist das Kapital und zu wieviel Prozent steht jeder Teil aus?

30) Drei Kapitalien betragen zusammen 12300 ℳ. Steht das erste 2 Jahre zu 4 %, das zweite 3 Jahre zu $4\frac{1}{2}$ % und das dritte $4\frac{1}{2}$ Jahre zu 5 % aus, so betragen die Zinsen zusammen $1867\frac{1}{2}$ ℳ, und zwar die des ersten um $724\frac{1}{2}$ ℳ weniger als die des dritten. Wie groß ist jedes Kapital?

31) Jemand hat zwei Kapitalien. $\frac{7}{12}$ des einen und $\frac{1}{13}$ des anderen tragen zusammen 688 ℳ Zinsen, wenn jenes Kapital zu 4 % 3 Jahre lang und dieses 4 Jahre lang zu 5 % aussteht. Der Rest des ersteren Kapitals zu $4\frac{1}{2}$ % in 5 Jahren und der Rest des zweiten zu 3 % in 6 Jahren geben zusammen 405 ℳ Zinsen. Wie groß ist jedes der beiden Kapitalien?

32) Ein Kaufmann kauft für 150 ℳ Kaffee und für eine gleiche Summe Zucker und erhält 400 Pfund Zucker mehr als Kaffee. Für 60 Pfund Zucker und 30 Pfund Kaffee löst er in der Folge bei 40 % Gewinn im ganzen 88,20 ℳ. Wieviel Pfund Kaffee und Zucker kaufte er?

Anhang II.

Prüfungsaufgaben.

I. Aufgaben aus der Arithmetik und Raumlehre, welche bei der Anstellungsprüfung bayerischer Schuldienstexspektanten gegeben wurden *).

1. In Oberbayern.

Im Jahre 1880. 1) Ein Geschäftsmann hat in seiner Kasse eine bare Summe von 25000 *M*. Er könnte 40000 *M* unter günstigen Bedingungen anlegen und nimmt daher die fehlende Summe zu einem niederen Zinsfuß auf. Später macht er unter denselben Bedingungen ein jährliches Geschäft, wozu er 36000 *M* eigenes und 14000 *M* geliehenes Geld verwendet. Nach Ablauf eines Jahres blieben ihm, nach Befriedigung seiner Gläubiger, im ersten Falle 1725 *M*, im zweiten Falle 2370 *M* übrig. Wieviel % wurden ihm, wieviel von ihm bezahlt?

2) Ein Vater hinterläßt bei seinem Tode seiner Frau, 2 Söhnen und 2 Töchtern ein Vermögen von 26400 *M*. Davon soll die Mutter 1000 *M* im Voraus und vom Rest die Hälfte, jede der beiden Töchter eine gewisse Summe, der erste Sohn 4mal den dritten Teil dieser Summe weniger 500 *M*, der zweite Sohn ebenfalls 4mal den dritten Teil des Anteils einer Tochter weniger 800 *M* erhalten. Wieviel bekommt jeder Erbe?

1881. 1) In einem Kohlenbergwerk befanden sich zur Förderung 2 Dampfmaschinen. Die erste brachte in je 5 Stunden 1728 Ztr. auf eine Höhe von $208\frac{1}{3}$ m, die zweite in je 3 Stunden 1600 Ztr. auf eine Höhe von 180 m. Beide Dampfmaschinen wurden an den-

---

*) Die aus der Geometrie gestellten Aufgaben sind zum Teil enthalten in: Fuß, Sammlung von Konstruktions- und Rechenaufgaben aus der Planimetrie und Stereometrie, S. 156 u. f. f. Diejenigen Aufgaben, welche in den letzteren Jahren gegeben wurden, sind im folgenden nebeneinander aufgeführt.

selben Ort hingebracht, und es fand sich, daß, nachdem die erste bereits $1\frac{3}{4}$ Stunden gearbeitet hatte, ehe die zweite anfing, diese doch nach 7 Stunden 225 Ztr. mehr lieferte, als jene. Aus welcher Tiefe förderten beide die Steinkohlen zu tage?

2) A und B gründen ein Geschäft, das ihnen einen jährlichen Gewinn von 1809 ℳ abwirft. A hatte dazu 3600 ℳ weniger hergegeben als B, mußte aber wegen Abwesenheit des B eine Zeit lang das Geschäft allein besorgen und erhielt dafür eine besondere Vergütung vom Gewinn vorab, wodurch sein Gesamtgewinn nur 81 ℳ hinter dem des B zurückblieb. Bei der Berechnung ergibt sich, daß mit Anrechnung der besonderen Vergütung die Prozente des A zu denen des B sich verhalten wie 8 : 7. Wieviel hat jeder zum Geschäft gegeben? Wieviel $^0/_0$ hat jeder von seiner Einlage erhalten?

1885. 1) Jemand hat den dritten Teil seines Vermögens in Grundstücken, 25 $^0/_0$ desselben in Staatspapieren und den Rest in Aktien angelegt, welche ihm eine Jahresdividende von 6,25 $^0/_0$ abwerfen. Die Staatspapiere verzinsen sich zu 4,5 $^0/_0$, und die Grundstücke rentieren sich zu 7 $^0/_0$. Wie groß ist das Gesamtvermögen, wenn das jährliche Einkommen aus dem Ertrage 5092,50 ℳ beträgt?

2) 2 Sorten Reis, von denen das kg bisher zu 0,80 ℳ, bez. 0,64 ℳ verkauft wurde, werden gemischt und nun das kg zu 0,75 ℳ verkauft. An 1720 kg werden auf diese Weise 86 ℳ gewonnen. Wieviel kg von jeder Sorte wurden zu der Mischung genommen?

1886. 1) Vier Erben, A, B, C und D, teilen sich in eine Erbschaft auf folgende Weise. A nimmt 400 ℳ über den vierten Teil des Ganzen, B nimmt 600 ℳ mehr, als die Hälfte des Teiles des A betrug; C nahm 300 ℳ weniger, als $\frac{3}{4}$ des Restes, worauf für D noch 1000 ℳ übrig bleiben. Wie groß war das ganze Vermögen?

2) Jemand versichert zwei Häuser, und zwar das eine mit $\frac{3}{8}$ $^0/_0$, das andere mit $\frac{1}{5}$ $^0/_0$ der Versicherungssumme, und es beträgt die jährliche Prämie für beide zusammen $64\frac{4}{5}$ ℳ. Sie würde jedoch nur $57\frac{1}{10}$ ℳ betragen, wenn er umgekehrt das erste mit $\frac{1}{5}$ $^0/_0$, das zweite mit $\frac{3}{8}$ $^0/_0$ hätte versichern lassen. Wie hoch ist jedes Haus taxiert?

1887. 1) Jemand kaufte eine zinnerne Schüssel von 11 Pfund Gewicht. Da er vermutet, daß dieselbe ungewöhnlich viel Blei enthalte, ermittelte er, wieviel sie von ihrem Gewicht im Wasser verliere und fand, daß dieser Gewichtsverlust $1\frac{1}{4}$ Pfund betrug. Wieviel Blei

und Zinn enthielt die Schüssel, wenn 7,2 Pfund Zinn im Wasser 1 Pfund und 11,4 Pfund Blei im Wasser ebenfalls 1 Pfund verlieren?

2) Die Arbeiter A, B und C verdienten miteinander die Summe von 960 *M*. Da diese Summe in 3 verschiedenen Beträgen und von 3 verschiedenen Kassen ausbezahlt wurden, holte nach Beendigung der Arbeit jeder der 3 Arbeiter einen der 3 Beträge. Nach Verabredung traten sie dann zusammen, um die ganze Summe Geldes wegen der gleichartigen Arbeitsleistung auch gleichmäßig unter sich zu teilen. Zu diesem Zweck gibt A, der den größten Betrag in Empfang genommen hat, soviel an B und C als jeder schon hatte; auf die nämliche Art teilt hierauf B mit C und A, und hierauf C mit A und B. Auf diese Art ist die beabsichtigte Teilung wirklich bewerkstelligt worden, und es fragt sich nun, wieviel Geld ein jeder an der Kasse ausbezahlt erhalten hat?

1888. 1) Vier Schulen A, B, C und D einer größeren Stadt zählen zusammen eine gewisse Anzahl von Schülern. Die Schule A zählt 25 % der ganzen Schülerzahl und 400 Schüler; die Schule B 50 % des Restes weniger 500; die Schule C 20 % der Schülerzahl von B und 590 und die Schule D die noch übrigen Schüler. Wenn nun die Schulen A und D zusammen 2450 Schüler zählen, wieviel beträgt dann die Schülerzahl jeder Schule?

2) Ein Wasserbehälter kann durch eine Röhre gefüllt, durch eine andere geleert werden. Ist die eine Röhre 3, die andere 2 Stunden geöffnet, so wird der Wasservorrat um 780 l vermehrt. Ist die erste $4\frac{1}{2}$, die zweite $3\frac{3}{4}$ Stunden geöffnet, so wird der Wasservorrat um 315 l vermehrt. Wieviel l gibt jede Röhre in der Minute?

1889. 1) In einem Eisenbahnzug befanden sich 295 Personen, und zwar verhielt sich die Anzahl der Passagiere der I. Klasse zu der der II. Klasse wie 3 : 4 und die der II. Klasse zu der der III. Klasse wie 5 : 6. Zwei Billete der II. Klasse kosteten soviel wie 3 Billete der III. Klasse und 1 Billet der I. Klasse kostet das $1\frac{1}{2}$fache eines Billetes der II. Klasse. Für sämtliche Billete wurden 2808 *M* gelöst. Wieviel Passagiere waren in jeder Klasse und was kostete je ein Billet?

2) Ein Kapitalist hat $\frac{2}{3}$ seines Vermögens in Aktien einer Versicherungsgesellschaft angelegt, welche am Schlusse des Jahres $8\frac{1}{2}$ % Dividende verteilt. Mit dem Reste des Vermögens beteiligt er sich an einem Unternehmen, das mit einem Verlust von $2\frac{1}{2}$ % abschließt.

Das gesamte Jahreseinkommen beträgt nun noch 3625 ℳ. Wie groß ist sein Vermögen?

3) Von einer Summe erhält A 5 ℳ mehr, als den 4. Teil, B bekommt 6 ℳ mehr, als den 5. Teil und C 20 ℳ mehr, als $\frac{3}{7}$ der Summe, und es erhält daher C ebensoviel, als A und B zusammen genommen. Wie groß ist diese Summe, wieviel erhält jeder von derselben und wieviel bleibt übrig?

1891. 1) Jemand besitzt 3 Gärten, die zusammen einen Wert von 9000 ℳ haben; der erste wirft eine jährliche Rente von 8 %, der zweite von 5 % und der dritte von 9 % ab. Der jährliche Nutzen aller 3 Gärten zusammen beträgt 650 ℳ und zwar der vom ersten und zweiten Garten zusammen 290 ℳ mehr als vom dritten. Welchen Wert hat jeder Garten?

2) A und B kaufen jeder für 36000 ℳ Staatspapiere, A $3\frac{1}{2}$ %ige und B 4 %ige. Der Kurs dieser Papiere stand so, daß B 25 ℳ an jährlichen Zinsen mehr bekam als A. Als beide Papiere um 12 % des Nominalwertes gestiegen waren, verkauften sie dieselben wieder, und A erhielt 600 ℳ mehr als B. Welches war der Kurs der Papiere beim Einkauf?

1892. 1) Ein Kapitalist gibt zu einem Unternehmen eine gewisse Summe. Im ersten Jahre gehen 5 % verloren. Das so verminderte Kapital läßt er noch ein Jahr stehen, und es werden jetzt 5 % gewonnen. Den Gewinn schlägt er zum Kapital und läßt dasselbe ein drittes Jahr stehen, in dem 8 % gewonnen werden. Nun erhält er an Kapital und Gewinn zusammen 16159 ℳ 50 ₰. Was war seine Einlage?

2) Ein Juwelier hat zwei Sorten Silber. Schmelzt er 10 kg der ersten mit 5 kg der zweiten Sorte zusammen, so ist die Mischung 0,686 fein; setzt er aber $7\frac{1}{2}$ kg der ersten Sorte mit $1\frac{1}{2}$ kg der zweiten Sorte zusammen, so hat die Mischung einen Gehalt von 0,624 fein. Von welchem Gehalt ist jede der beiden Silbersorten?

3) An einer Mauer, welche $53\frac{1}{3}$ m lang, 1 m breit und 2 m hoch ist, arbeiten 2 Maurer, von denen der eine bei neunstündiger Arbeit im Tage $5\frac{1}{3}$ cbm, der andere bei täglich elfstündiger Arbeit in 6 Tagen $35\frac{5}{9}$ cbm aufzuführen imstande ist. In welcher Zeit wird die Mauer fertig, wenn jeder 10 Stunden täglich arbeitet und der erste 5 Tage, der zweite nur 2 Tage versäumt?

1896. Drei gezahnte Räder, welche mit ihren Zähnen inein-

ander greifen, bewegen sich ungleich schnell um ihre Achsen. Bis sich das erste 3mal umdreht, ist das zweite nur 1mal umgegangen, und bis sich das dritte Rad 2mal umdreht, muß das erste 27mal rotieren. Zieht man vom Quadrate der Anzahl der Zähne des dritten Rades das Produkt aus der Anzahl der Zähne der beiden anderen Räder ab, so erhält man die Zahl 25812. Wie viele Zähne hat jedes der drei Räder? (q.)

2. In Niederbayern.

1886. Wer gewinnt mehr Prozente? A macht Börsengeschäfte. Das erste Mal verhält sich sein Gewinn zum Kapital wie 1 : 16; das 2. Mal gewinnt er 2210 *M*; das 3. Mal verhielt sich das Kapital zum Gewinn wie 10 : 1; jedesmal wird der Gewinn zum Kapital geschlagen, so daß sich schließlich eine Summe von 31603 *M* ergibt. B kauft 800 m Zeug à 60 *₰*; er verkauft das m zum Fabrikpreis, bekommt infolge Barbezahlung vom Fabrikanten 20 % Rabatt und gibt seinen Kunden bei Barzahlung 4 % Rabatt.

1887. Wenn ein Konsortium nur 30 *M* zu teilen hätte, so würde jede Person um 25 *₰* weniger erhalten, als wenn es 4 Personen weniger wären. Wieviel bekommt jedes Mitglied, wenn 36030 *M* zu verteilen sind? (q.)

1888. A und B haben zusammen 4700 *M* Kapital ausgeliehen und nehmen in 3 Jahren $694\frac{1}{2}$ *M* Zinsen ein. Würde das Kapital des A durch das des B dividiert, so ergäbe sich als Quotient 5 und als Rest 500 *M*. Würde der Zinsfuß beider Kapitalien gewechselt, so betrüge der dreijährige Zins $49\frac{1}{2}$ *M* weniger. Zu wieviel % sind beide Kapitalien ausgeliehen?

1889. Unter 20 Kinder, Knaben und Mädchen, verteilt man 144 Nüsse so, daß die Knaben die Hälfte der ganzen Anzahl bekommen, jeder einzelne aber 3 mehr, als ein Mädchen erhält. Wieviel Knaben und Mädchen waren es? (q.)

1891. Ein Rentier (Witwer), der sein Vermögen in zwei Kapitalien ausstehen hat und zwar das kleinere zu $4\frac{1}{2}$, das um 20000 *M* größere zu 4 %, bestimmt, daß das Vermögen unter seine Kinder gleichmäßig zu verteilen sei. Er stirbt, und unmittelbar darauf sterben auch 2 seiner Kinder. Die Kosten der Beerdigung rc. erheischen die Summe von 2200 *M* oder gerade soviel, als die hiefür zu erhebenden Zinsen des größeren Kapitals für 3 und des kleineren für 4 Monate

zusammen ausmachen. Wieviel erbt jedes Kind, wenn der Tod der beiden Geschwister jedem der übrigen Kinder 15000 M mehr zuweist? (q.)

1892. Eine Hausfrau dingte 2 Mägde; jede sollte ein Paar Schuhe und ein Hauskleid und außerdem 80 M Jahreslohn erhalten. Die eine Magd mußte sich schon beim Antritte des Dienstes die Schuhe erbitten, trat aber nach 6 Monaten aus dem Dienst und erhielt da 45,5 M; die andere brauchte alsbald das Hauskleid; sie verließ den Dienst nach 9 Monaten und bekam 62,5 M. Wie teuer war das Kleid, wie teuer die Schuhe?

1897. Schriftlich. 1) Drei Kapitalien betragen zusammen 10000 M. Das eine ist zu 5, das andere zu 4, das dritte zu 3 % ausgeliehen. Die jährlichen Zinsen des ersten Kapitals betragen um 14 M mehr als die des zweiten. Die Jahreszinsen aller drei Kapitalien machen im ganzen 420 M aus. Wie groß ist jedes Kapital?

2) Der Umfang zweier gleichschenkliger Dreiecke mit gemeinsamer Grundlinie beträgt 720 m. Die beiden Schenkel des ersten Dreiecks verhalten sich zu denen des zweiten wie 3 : 7; die Länge der gemeinsamen Grundlinie ist $\frac{1}{9}$ der Schenkelsumme des kleineren Dreiecks. Zu bestimmen ist:

a) die Länge der gemeinsamen Grundlinie,

b) die Schenkellänge eines jeden Dreiecks,

c) der Inhalt des durch die beiden Dreiecke entstandenen Vierecks.

3) In eine regelmäßige vierseitige Pyramide, deren Grundkante $\frac{3}{8}$ m und deren Seitenflächenhöhe 0,3125 m beträgt, wird ein Kegel eingeschrieben. Um wieviel differieren die beiden Körper hinsichtlich ihres Kubikinhaltes? ($\pi = 3{,}14$).

Mündlich. 1) Wenn der österreichische Gulden 100 Kreuzer oder 1 M 70 ₰ gilt, so bekommt man für 50 M wieviel österreichisches Geld? (29,41 fl.).

2) A, B und C teilen 1570 M; A erhält $\frac{5}{8}$ und B $\frac{5}{9}$mal soviel als C; wieviel dieser? (720 M).

3) Hätte ein Kaufmann am Samstag 3 M 24 ₰ weniger, am Sonntag aber 1 M 74 ₰ mehr eingenommen, so würde seine Einnahme jeden Tag durchschnittlich 35 M betragen haben. Wieviel hat er die Woche hindurch gelöst? (246,50 M).

4) Jemand nimmt jährlich 2000 ℳ Zinsen ein und zwar $\frac{3}{4}$ derselben von einem Kapital, das zu 4 %, und $\frac{1}{4}$ derselben von einem Kapital, das zu $3\frac{1}{3}$ % ausgeliehen ist. Wie groß ist sein Gesamtkapital? (52500 ℳ).

5) Vor Jahren war der Vater 31, seine Tochter $\frac{1}{2}$ Jahr alt; jetzt ist die Tochter $\frac{1}{2}$mal so alt als der Vater; also zählt der Vater wieviel Jahre? 61 Jahre).

6) Vor 12 Jahren war die Schwester $\frac{1}{2}$mal so alt als der Bruder; jetzt ist sie $\frac{4}{5}$mal so alt, zählt also wieviel Jahre? (16 Jahre).

3. In der Rheinpfalz.

1884. Jemand verkauft 10 Prämienlose, die er vor mehreren Jahren zu einem gewissen Kurse gekauft hatte, um 2250 ℳ und gewinnt dabei so viele Prozente als der dritte Teil von dem Ankaufspreise eines Loses betrug. Welches war der Preis eines solchen beim Ankaufe? (q.)

1885. 1) Ein 270 l haltendes Faß ist mit starkem Weine gefüllt. Von diesem wird ein gewisses Quantum in Flaschen gezogen und im teilweise geleerten Fasse durch Wasser ersetzt. Wenn dem nun wieder vollen Fasse 63 l Wein mehr, als beim ersten Male entnommen und abermals in demselben durch Wasser ersetzt werden, so ist gerade soviel Wein als Wasser im Fasse. Wieviel l Wein wurden beim ersten Male abgezapft? (q.)

2) Ein Lehrer hat als Nebenverdienst 2 verschiedene einträgliche Privatstunden und eine Gemeindeschreiberei. Die erste Privatstunde bringt mit der Gemeindeschreiberei noch dreimal soviel ein, als die zweite Privatstunde ohne die Gemeindeschreiberei; die zweite Privatstunde aber trägt mit der Gemeindeschreiberei noch um $\frac{1}{5}$ mehr als doppelt soviel, als die erste Privatstunde ohne die Gemeindeschreiberei. Wie hoch beläuft sich der Ertrag einer jeden der beiden Privatstunden, wenn die Gemeindeschreiberei 280 ℳ einbringt?

3) Man berechne folgenden Ausdruck:

$$\frac{x-1}{2x+2} - \frac{3x-4}{3x+3} + \frac{2x-1}{6x+6}!$$

4) Man löse folgende Gleichung:

$$\frac{4-2x}{3} - \frac{4}{6x-3} = \frac{1{,}5x}{x-0{,}5} - \frac{4x^2}{3(2x-1)}!$$

1886. 1) Ein Rentner legte als stiller Teilhaber in 2 Geschäfte je ein Kapital, und zwar in das zweite 2000 ℳ mehr, als in das erste. Dieses brachte ihm 480 ℳ, das zweite aber 800 ℳ Gewinn, weil letzterer beim zweiten Geschäft um 2 % höher war, als beim ersten. Wie groß waren die eingelegten Kapitalien und wieviel % Gewinn warf jedes der beiden Geschäfte ab? (q.)

2) Um 2 Räder, deren Umfänge sich verhalten wie 5 : 3, sind zwei Seile geschlungen, deren Differenz um 280 m größer ist, als die Differenz der Umfänge der Räder. Das längere Seil läßt sich 12 mal mehr um das größere Rad wickeln, als das kürzere um das kleinere Rad, und wenn das große Rad sich 3 mal so schnell umdreht, als das andere, so wickeln sich die Seile zu gleicher Zeit ab. Wie lang sind die Seile und wie groß die Umfänge der Räder?

3) Man bestimme aus der folgenden Gleichung den Wert von x:

$$\frac{(5b - 9c)x}{7a^2} + 5a - \frac{(15b - 11a)x}{7b - 5c} - \frac{6a^2 + 2\frac{1}{3}b}{5a}$$
$$= \frac{7\frac{1}{5}a^2 - c}{3a} - \frac{(27c - 11a)x}{7b - 5c}.$$

1887. 1) 3 Lehrer haben zusammen 219 Schüler. Da diese sehr ungleich verteilt sind, gibt A den zehnten, C den sechsten Teil seiner Kinder an B. Nachdem diese Umschulung vollzogen, haben A und B gleichviel, C aber hat 3 Kinder mehr als A. Wieviel Kinder hatte jeder Lehrer vor der Umschulung?

2) „Mit meinen pekuniären Verhältnissen“, sagte A zu B, „bin ich sehr zufrieden, denn ich habe zu meinem Gehalte aus den dir vorhin angegebenen Kapitalien noch 333 ℳ Zinsen jährlich einzunehmen“. „Da stehen wir ja finanziell einander fast gleich“, entgegnet B; „ich besitze zwar 600 ℳ Kapitalien weniger, erhalte aber 7 ℳ jährlich Zinsen mehr als du, da meine Kapitalien ½ % Zinsen mehr ertragen, als die deinigen.“ Wie groß sind die Kapitalien eines jeden und welche Prozente ertragen sie? (q.)

1888. 1) Ein Rentner hat einem Aktiengeschäft 160000 ℳ zu einem gewissen Zinsfuß überlassen. Am Ende des ersten Jahres läßt er sich 2400 ℳ einhändigen, den Mehrbetrag der Zinsen aber zum Kapitale schreiben. Am Ende des zweiten Jahres läßt er sich abermals 2400 ℳ geben und hat nun von dem Geschäft als Kapital und Zins 168987 ℳ zu fordern. Wieviel Prozent erhielt der Rentner? (q.)

2) 2 Fässer sind je teilweise mit Wein gefüllt. Soll das Faß A

ganz gefüllt werden, so muß aus B $\frac{1}{5}$ seines Inhaltes und 2 l in A gegossen werden, und A enthält nun 3 mal soviel, als der Rest von B beträgt. Sollte dagegen B ganz gefüllt werden, so müßte von dem ursprünglich in A befindlichen Wein $\frac{1}{5}$ und 4 l genommen und in B gefüllt werden, und letzteres enthielte $\frac{3}{2}$ mal soviel, als der Rest in A. Wieviel war ursprünglich in jedem Fasse und wieviel geht in jedes?

1889. Es kauft jemand ein Haus um 24600 ℳ und nimmt dazu ein Kapital von 11200 ℳ zu niederen Prozenten auf, wodurch er einen jährlichen Überschuß von 1179 ℳ an Zinsen hat. Später kauft er ein zweites Haus für 13800 ℳ und nimmt dazu 8400 ℳ zu denselben Prozenten auf, was ihm einen Überschuß von 582 ℳ an Zinsen pro Jahr einbringt. Zu wieviel $^0/_0$ war das geliehene Geld aufgenommen und wie hoch verinteressierten sich die Häuser, wenn beide gleiche Prozente abwarfen?

1890. „Heuer kann ich mit dem Ertrage meines Tabakbaues nicht zufrieden sein", sagte ein Landwirt, „denn er brachte mir bei 425 ℳ Reingewinn nur geringe Prozente des Wertes meiner mit dieser Handelspflanze bestellten Äcker. Vor einigen Jahren verzinsten sich diese bei 610 ℳ Reingewinn doch noch $2\frac{1}{5}$ $^0/_0$ höher als bei der letzten Ernte; schade nur, daß ich damals eine Fläche bebaute, die um einen auf 4800 ℳ gewerteten Acker kleiner war als die diesjährige." Welchen Wert haben die Grundstücke der letzten Ernte, und wieviel Prozent Gewinn werfen sie ab? (q.)

1891. 1) Ein Kapitalist überließ einem Fabrikanten 60000 ℳ gegen einen gewissen Prozentsatz. Am Ende des ersten Jahres ließ er sich von dem um die Zinsen vermehrten Kapitale 3000 ℳ einhändigen, den Rest aber zu demselben Prozentsatze noch ein weiteres Jahr stehen. Nun erhielt er an Kapital und Zinsen 64236 ℳ; wieviel $^0/_0$ erhielt er? (q.)

2) Ein Kaufmann hat 2 Kaffeevorräte; von der ersten Sorte kostet $\frac{1}{2}$ kg soviel Pfennig, als davon kg vorhanden sind; von der zweiten Sorte sind 20 kg mehr vorhanden, und $\frac{1}{2}$ kg kostet 0,1 ℳ mehr. Der Wert der beiden Sorten ist 430,24 ℳ. Wieviel kg sind von jeder Sorte vorrätig? (q.)

1892. Schriftlich. 1) Ein Gutsbesitzer hat drei Grundstücke im Gesamtwerte von 10605 ℳ, welche einen jährlichen Reingewinn von 482 ℳ abwerfen, wenn man die Rente des 1. Grundstückes zu 4 $^0/_0$, die des 2. zu $4\frac{1}{2}$ $^0/_0$ und die des 3. zu 5 $^0/_0$ annimmt.

Der Reinertrag des 3. Grundstückes beträgt 5 ℳ weniger als der des 2. Grundstückes. Welches ist der Wert eines jeden der drei Grundstücke?

2) Jemand hat Gelegenheit, 23000 ℳ als sicheres Kapital anzulegen. Da er aber gerade nur 15000 ℳ besitzt, so nimmt er die noch fehlenden 8000 ℳ zu geringerem Zinsfuße auf und behält, nachdem er die Zinsen für diese bezahlt, jährlich 905 ℳ an Zinsen übrig. Unter denselben Bedingungen nimmt er ein anderes Mal 9400 ℳ auf und verleiht 17500 ℳ. Dies bringt ihm jährlich einen reinen Zinsertrag von $539\frac{1}{2}$ ℳ. Zu wieviel % hat er Geld ausgeliehen und aufgenommen?

3) Ein Weinhändler kauft für 1152 ℳ Rotwein und für eine gleiche Summe Weißwein, wobei er von letzterem 8 hl mehr erhält, als von dem ersteren. Er verkauft dann $3\frac{3}{4}$ hl Rotwein und 5 hl Weißwein und löst hiebei bei 25 % Gewinn im ganzen 450 ℳ. Wieviel hl hatte er von jeder Weinsorte eingekauft? (q.)

Mündlich. 1) Welche Kraft ist erforderlich, um ein 5 Zentner schweres Faß auf einer 2,8 m langen Schrotleiter 0,9 m hoch zu heben, wenn die Überwindung der Reibung 20 Pfund erfordert?

2) Ein Kegel hat einen Durchmesser von 16 cm und eine Höhe von 19 cm. Daraus wird die größte quadratische Pyramide geschnitten. Wie verhalten sich die Inhalte?

3) Ein Zylinder hat einen Durchmesser von 8 cm und eine Höhe von 9 cm. a) Wie verhält sich Grund- und Umfläche? b) Wie groß ist der Inhalt? c) Wie groß die Oberfläche?

4) Ein Kapital von 1280 ℳ wird zu 5 % ausgeliehen. Nach 5 Jahren wird ein anderes von 2475 ℳ zu 4 % ausgeliehen. Nach wieviel Jahren haben beide Kapitalien gleichviel Zinsen getragen?

4. In der Oberpfalz.

1886. 1) Ein Unternehmen hatte einen Kapitalaufwand von 62500 ℳ erfordert. Mit diesem Kapital wäre ein Gewinn von 14 % erzielt worden, wenn nicht kurz vor Ablauf des ersten Geschäftsjahres ein Posten von 3750 ℳ verloren gegangen wäre. Wieviel % warf das Unternehmen im ersten Jahre ab?

2) Drei Kapitalien betragen zusammen 40000 ℳ. Das eine ist zu 5, das andere zu 4 und das dritte zu 3 % ausgeliehen. Die Jahres-

zinsen betragen zusammen 1609 ℳ, und zwar die Jahreszinsen des zweiten um 50 ℳ mehr, als die des ersten. Wie groß ist jedes Kapital?

1887. 1) Ein Kapital von 24600 ℳ liegt zum teil zu $4\frac{1}{2}$, zum teil zu $4\frac{1}{4}$ % aus. Würde der erste Teil zum Prozentsatz des zweiten, und dieser zum Prozentsatz des ersten Teiles angelegt, so würde das Kapital jährlich 10,5 ℳ Zins mehr tragen. Wieviel betragen beide Teile?

2) Ein Kaufmann stellt seine Zahlungen ein. Er hat nach seinen Büchern 21572 ℳ zu fordern, sein Warenlager beträgt 1438 ℳ. Dagegen ist er schuldig: 37580 ℳ. Wieviel hat ein Gläubiger, dem obiger Kaufmann 790 ℳ schuldet, zu erwarten, wenn er auf 4 % weniger rechnen muß, als derselbe geben könnte?

3) Eine Legierung von Kupfer und Zinn wog 80,8 kg. Im Wasser verlor sie 10 kg. Wieviel war von jedem Metall a) dem Gewicht, b) dem Volumen nach vorhanden? Spezifisches Gewicht des Kupfers 8,8, des Zinns 7.

1888. 1) Jemand will nach 3 Jahren an Kapital und Zinsen (Zinsen und Zinseszinsen) 13891,50 ℳ erheben. Welches Kapital muß er heute zu 5 % anlegen?

2) Ein Vater hinterläßt seinen Kindern: erstens 2 Obligationen a) zu 1000 ℳ im Kurse zu $102\frac{1}{2}$ mit den vierteljährigen $3\frac{1}{2}$ %igen Zinsen, b) zu 1500 ℳ im Kurse zu 99 samt den halbjährigen $4\frac{1}{2}$ %igen Zinsen; zweitens an Sparkassenscheinen 860 ℳ samt den zweijährigen Zinsen (Zins und Zinseszinsen) zu $3\frac{1}{2}$ %; drittens eine Lebensversicherungspolice zu 25000 ℳ mit $1\frac{1}{2}$ %igem Abzuge; viertens einen Sterbekassaschein zu 1800 ℳ mit 6 % Abzug; fünftens 400 ℳ an barem Gelde. Die Erbschaftssteuer beträgt $1\frac{1}{2}$ % der Gesamtsumme. Das reine Vermögen wird so unter die 4 Kinder verteilt, das A $\frac{1}{3}$, B $\frac{1}{4}$, C $\frac{1}{5}$ und D den Rest erhält. Welches ist der Anteil jedes Kindes?

1889. Jemand vertauschte Kartoffeln gegen Rüben; der Zentner der ersteren wurde zu 2,20 ℳ, der letzteren zu 2,50 ℳ berechnet. An Rüben waren für 30 ℳ weniger vorhanden, als an Kartoffeln; gleichwohl hatte der Empfänger der Rüben an den andern noch 1,20 ℳ hinauszuzahlen. Wieviel Zentner Kartoffeln und wieviel Zentner Rüben waren vorhanden?

1892. 1) Ein Rentner hat sein Kapital zu $4\frac{1}{2}$ % angelegt Von den Zinsen nimmt er jährlich 3000 ℳ für den Lebensunterhal weg. Am Ende des 2. Jahres findet er, daß sich trotzdem sein Ver

mögen um 3067,40 ℳ vermehrt hat. Wie groß war sein Kapital vor 2 Jahren?

2) Auf welche Summe lautet ein Wechsel und wann ist derselbe fällig, wenn er mit $\frac{3}{4}$ % monatlichem Diskonto bar mit 222 ℳ, mit $\frac{3}{5}$ % monatlich bar mit 225,60 ℳ gezahlt wird?

3) 3 Zentner Flachsstengel geben 1 Zentner trockene = 66 Pfd. geröstete Stengel = 36 Pfund gebrochenen = 14 Pfund geschwungenen Flachs und 15 Pfund Werg. Auf 1 ha Land kann man 260 Zentner grünen Flachs ernten. a) Wie groß ist der Rohertrag nach diesem Verhältnisse auf 1 bayer. Tagwerk (34 a 7 qm), wenn 1 Pfund Schwingflachs 72 ₰ und 1 Pfund Werg 35 ₰ kostet? b) Wie hoch beläuft sich der gesamte Rohertrag (per Tagwerk), wenn auf 17 Zentner trockene Stengel $3\frac{1}{2}$ Zentner Körner à 16 ℳ gerechnet werden? (Überall 2 Dezimalen; Dezimalen mit 0,5 und darüber werden bei unbedeutenden Werten als Einheit der nächst höheren Stelle behandelt.)

1893. An einem Unternehmen hatten sich unter anderen Personen auch die Personen A und B mit einer Einlage von zusammen 900 ℳ beteiligt, und zwar A $1\frac{1}{2}$ Jahre, B $\frac{2}{3}$ Jahre lang. Einlage und Gewinn betrugen zusammen für A 472, für B 540 ℳ. Wie groß war die Einlage jeder Person, und wieviel Prozent Gewinn hatte das Unternehmen jährlich erzielt? (q.)

1897. Schriftlich. 1) Von den Endpunkten einer 216 km langen Eisenbahnstrecke fahren gleichzeitig 2 Züge einander entgegen, ein Güterzug mit der Geschwindigkeit von 12 m (in der Sekunde) und ein Personenzug mit größerer Geschwindigkeit, so daß sie nach einer gewissen Zeit kreuzen. Wenn diese Kreuzung eine halbe Stunde früher statthaben sollte, müßte die Geschwindigkeit des Güterzuges um 3 m, die des Personenzuges um 7 m erhöht werden. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Personenzuges, wie viele Minuten nach der gleichzeitigen Abfahrt findet die Kreuzung statt, wie viele km ist die Kreuzungsstelle von jedem Endpunkte der Bahnstrecke entfernt?

2) Ein Rechteck mißt 2880 qm. — Würde man seine Länge um die halbe Länge vergrößern, so wäre der Flächeninhalt 6553 qm. Wie lang und wie breit ist das Rechteck?

3) Zieht man aus dem einen Endpunkte einer Kreissehne einen Durchmesser und fällt aus dem anderen Endpunkte ein Perpendikel auf diesen Durchmesser, so wird der letztere in zwei Abschnitte geteilt, von

denen der an die Sehne stoßende um 40 m kleiner ist als diese, der andere aber 144 m mißt. Wie groß ist demnach die Sehne?

4) Der Kubikinhalt eines 18 m hohen Pyramidenstumpfes beträgt 294 cbm. Wie groß sind die beiden Grundflächen, wenn sie um 16 qm differieren?

Mündlich. 1) Ein Kaufmann gewährt bei Barzahlung seinen Kunden 4 % Sconto von dem auf der Ware bezeichneten Preise, gewinnt dabei aber immer noch $33\frac{1}{3}$ %. Was hat ihn eine Ware gekostet, die er zu 4,50 ℳ auszeichnet?

2) A und B besitzen zusammen 100 ℳ. Nimmt A von seiner Barschaft das Drittel und legt dieses zum vierten Teil der Barschaft des B, so kommen 33 ℳ zusammen. Wieviel besitzt jeder?

3) Ein Händler verkaufte 100 ℔ teils Butter, teils Schmalz und löste dafür im ganzen 99 ℳ. Wieviel ℔ Butter und wieviel ℔ Schmalz hat er verkauft, wenn das ℔ Butter 1,05 ℳ und das ℔ Schmalz 89 ₰ kostete?

4) Der Tageslohn von 7 Maurern und 5 Zimmerleuten beträgt 33 ℳ, während der Wochenlohn von 5 Maurern und 7 Zimmerleuten nur 32 ℳ beträgt. — Wie hoch ist hienach der Wochenlohn a) eines Maurers, b) eines Zimmermanns?

5) Zwei Zahlen verhalten sich wie 12 : 5; die Differenz ihrer Quadrate ist 1071. Wie heißen diese Zahlen?

6) Die Flächen zweier ähnlicher Figuren betragen 121 und 169 qm. Zwei ähnlich gezogene Diagonalen in diesen Figuren differieren um 1 m. Wie lang ist jede dieser Diagonalen?

5. In Oberfranken.

1886. Aus einer Gantmasse wird 4 Gläubigern ein Grundstück derart zugewiesen, daß A auf $\frac{2}{9}$ des Erlöses Anspruch hat, während B um $\frac{1}{4}$ weniger als A, C aber um die Hälfte mehr als D erhalten soll. Ein späterer Schätzungswert des Grundstücks übertrifft den bei der anfänglich beabsichtigten Teilung gemachten um $18\frac{3}{4}$ %. Beim Verkauf erlöst man aber um 20 % weniger, als der zweite Anschlag beträgt und außerdem geht am Erlös für Steuern u. s. w. noch $\frac{1}{5}$ des ersten Anschlags ab. Infolge davon erhält B 300 ℳ weniger, als ihm nach dem anfänglichen Schätzungswert zugeschrieben war. Um wieviel ℳ erhält D weniger?

1887. Es gibt eine zweizifferige und eine vierzifferige Zahl von

folgender Beschaffenheit: Dividiert man mit der ersten in die zweite, so geht das 204mal und läßt 1 zum Rest; macht man aus beiden Zahlen eine Zahl, indem man die erste links vor die zweite setzt, so ist diese Zahl gerade halb so groß, als die Zahl, welche man erhält, wenn man umgekehrt die zweite links vor die erste setzt. Wie heißen die beiden Zahlen?

1888. Ein Kapitalist hatte eine gewisse Summe Geldes zu einem bestimmten Prozentsatze ausgeliehen und mußte sie zurücknehmen. Könnte er um 1 % mehr Zins erhalten, so würde ihm ein um 6000 *M* vermindertes Kapital soviel Zins tragen, als er bisher erhalten; wäre er aber genötigt, den Zins um $\frac{1}{2}$ % zu erniedrigen, so würde er von einem um 7500 *M* vergrößerten Kapital doch nur 112,50 *M* mehr Zins einnehmen, als bisher. Wie groß war das heimgezahlte Kapital und zu wieviel % war es ausgeliehen?

1889. I. $\frac{a}{x} - (a - b)y = a$; II $\frac{ab}{y} - (a^2 - b^2)x = 0$.

Man bestimme hieraus den Wert von x und y (Probe)!

2) Der Kaufmann A gewinnt mit einem gewissen Kapitale jährlich $16\frac{2}{3}$ %. Nach 3 Jahren verbindet sich mit ihm zu demselben Geschäfte der Kaufmann B mit einem um 3000 *M* geringeren Kapitale, als das des A war. Vier Jahre nach dieser Verbindung gesellt sich ein dritter Kaufmann, C, zu ihnen, welcher 6000 *M* mehr hergibt als B. Als nach einer bestimmten Anzahl von Jahren später das Geschäft aufgelöst wurde, bekam C 12500 *M* weniger an Gewinn, als A, B 3000 *M* mehr, als C. Wieviel Mark gab jede Person her und auf wie lange?

1890. Das hinterlassene Vermögen für drei noch unmündige Kinder besteht in 10975 *M*, ist nach deren Alter verschieden unter sie verteilt und von ihrem Vormunde zu 5 % in einer Handlung untergebracht. Das erste Kind heiratet nach 7, das zweite nach 10, das dritte nach 12 Jahren und doch bekamen alle drei an Kapital und einfachen Zinsen gleichviel als Heiratsgut. Wie war das Vermögen verteilt?

1892. A und B geben zu einem Geschäfte zusammen 5000 *M* und zwar A auf 12, B auf 16 Monate. Bei der Teilung erhielt A 2500 *M* Kapital samt Gewinn, B erhielt 4000 *M*. Wieviel hatte jeder eingelegt? (q.)

1895. Zwei Kaufleute, A und B, legten ihre Kapitalien zu-

sammen, um gemeinschaftlichen Handel zu treiben. Beim ersten Unternehmen gab A sein Kapital 7 Monate, B das seinige 8 Monate her, der Gewinn beider betrug 3015 ℳ. Zu einem zweiten gemeinschaftlichen Handel gab A sein anfängliches Kapital auf 6 Monate, B das seinige auf 5 Monate; hierdurch gewannen sie zusammen 2250 ℳ. Zum dritten Male gab A 1000 ℳ weniger als zu jedem der vorhergehenden Unternehmen auf 4 Monate, B 1000 ℳ mehr als sein anfängliches Kapital auf 6 Monate; der gemeinsame Gewinn war 2010 ℳ. Wie groß waren die erwähnten Kapitalien des A und B, wenn der Gewinn bei allen 3 Geschäften verhältnismäßig gleich groß war?

1896. Schriftlich. 1) Der Inhalt eines regulären Sechsecks von 15 cm Seite soll durch Parallelen zu seinen Seiten halbiert werden. Welche Peripherie hat der in das innere Sechseck gelegte größte Kreis?

2) Bei einem Kegelstumpf von 2198 ccm Inhalt und 12 cm Höhe beträgt die Differenz der Radien 5 cm. Wie groß sind diese? Wie groß ist die Kegeloberfläche, und welchen Inhalt hat die größte Kugel, die sich aus ihm drechseln läßt?

3) Zwei Kaufleute gewannen zusammen 516 ℳ. A hatte 1200 ℳ $1\frac{1}{2}$ Jahr, B eine Summe $1\frac{1}{3}$ Jahr zum Geschäft gegeben. B erhielt als Einlage und Gewinn 992 ℳ. Wieviel hatte er eingelegt?

Kopfrechnen. 1) A und B schaffen für leichen Taglohn. A erhielt für 20 Tage $1\frac{1}{2}$ hl Korn und 32,4 ℳ, B für 32 Tage $2\frac{1}{2}$ hl Korn und 51,2 ℳ. Wie hoch wurde 1 hl Korn in Anschlag gebracht? Wieviel betrug der tägliche Arbeitslohn?

2) Jemand kauft ein Stück Tuch, das m zu 7,50 ℳ. Das Stück enthält zwar 5 m mehr als angegeben, ist aber so schlecht, daß das m für 6 ℳ verkauft werden muß, wodurch dem ersten Käufer ein Schaden von $13\frac{1}{3}$ % erwächst. Wieviel m enthält das Stück?

3) A lieh 6000 ℳ zu $3\frac{1}{2}$ % aus, 4 Jahre später noch 9000 ℳ zu 4 %. Wenn nun beide Summen weiter ausstehen, wann wird die zweite Summe $1\frac{1}{3}$ mal soviel Zins gebracht haben, als die erste?

4) $12\frac{3}{5}$ kg 7pfündiges Zinn sollen in Reichszinn umgewandelt werden: a) durch Zusatz von reinem Zinn, b) durch Ausscheidung von Blei!

5) Eine nach 7 Monaten fällige Warenschuld wird bei $2\frac{2}{3}$ % monatlichem Diskonto nach $2\frac{1}{2}$ Monaten mit 1600,5 ℳ abgetragen;

für eine um 230 ℳ größere Schuld beträgt bei $\frac{3}{4}$ % monatlichem Diskonto der Abzug 21 ℳ mehr. Wann war dieselbe fällig?

6. In Mittelfranken.

1880. 1) $7,1 - (13,4 - 2,5x)\,4^3/_4 = 39,7625 - (0,45 + 8x)9$.

2) Ein Gartenbesitzer will einen Teil seines Gartens mit einer bestimmten Anzahl von Bäumen im Quadratverbande bepflanzen. Beim ersten Versuch blieben ihm 19 Bäume übrig; darauf macht er zwei Reihen mehr und setzt in jede Reihe 2 Bäume mehr, als anfangs und findet, daß ihm nun 37 Bäume fehlten. Wieviel Bäume standen ihm zu gebote?

1887. Jemand hat nach 2, nach 4 und nach 6 Jahren gewisse Summen Geldes, welche zusammen 9520 ℳ ausmachen, heimzuzahlen. Wollte er gegen 5% einfachen Rabatts dieselben jetzt bar erlegen, so dürfte er nur 7800 ℳ, und würde er nach 2 Jahren bei gleichem Rabatt alles auf einmal erlegen, so dürfte er nur 8500 ℳ heimbezahlen. Wie groß sind die Teilsummen?

1888. Ein Vater gibt das Alter seiner drei Kinder in folgender Weise an: Dividiert man die Zahl 48 durch das Alter des jüngsten Kindes, die Zahl 24 durch das des nächst älteren, so ist 32 die Summe des Quotienten. Dividiert man ferner 24 durch das Alter des jüngsten Kindes, 12 durch das Alter des nächst älteren und 48 durch das des ältesten Kindes, so ist 28 die Summe der Quotienten. Dividiert man endlich 12 durch das Alter des jüngsten Kindes, 48 durch das des nächst älteren und 24 durch das Alter des ältesten Kindes, so beträgt die Summe der Quotienten ebenfalls 28. Wie alt ist jedes Kind?

1889. Drei Ökonomen kaufen ein Gut für 30000 ℳ. Keiner besitzt aber soviel, daß er allein den Kaufpreis erlegen könnte; B bedürfte dazu noch $\frac{15}{16}$ vom Vermögen des A, C zu seinem Vermögen noch $\frac{4}{5}$ von B und A zu seinem ganzen Vermögen noch $\frac{7}{9}$ des C. Wie groß ist das Vermögen eines jeden?

1890. Ein Kapitalist B hat 1200 ℳ mehr ausstehen als A, und die Prozente, welche er erhält, sind um $\frac{1}{4}$% höher als die vom Kapital des A; aus diesem Grunde nimmt er jährlich $68\frac{1}{2}$ ℳ mehr Zins ein als jener. C hat ein um 2000 ℳ größeres Kapital ausstehen als B und erhält $\frac{3}{4}$% mehr als dieser, weshalb er jährlich

$161\frac{1}{2}$ ℳ mehr Zins bezieht als B. Wie groß ist das Kapital jeder dieser drei Personen und wieviel Prozente bekommt jede?

1891. Ein Kapitalist erwirbt 2 Häuser und möbliert sämtliche Räume derselben zum Vermieten. Die Möbel des ersten Hauses kommen auf 5850 ℳ, die des andern auf 7350 ℳ zu stehen. Durch die Möblierung sind beide Häuser so im Wert gestiegen, daß der des ersten sich zu dem des zweiten wie 5 : 7 verhält. Stellt der Käufer aber die für das erste Haus bestimmten Möbel in das zweite, und die für das zweite Haus bestimmten in das erste, so verhalten sich die Werte der Häuser wie 19 : 25. Welchen Wert hat jedes der Häuser ohne Möbel?

1892. Zwei Kaufleute A und B legen ihre Kapitalien zusammen, um gemeinschaftlich Handel zu treiben. Nach 5 Monaten zieht jedoch A sein Geld zurück, und B beendet 1 Monat später das Geschäft, welches im ganzen einen Gewinn von 7600 ℳ abwirft. Zu einer zweiten gemeinschaftlichen Unternehmung gibt A sein anfängliches Kapital auf 7 Monate her und B das seinige auf 8 Monate. Sie gewinnen hierbei zusammen 10 400 ℳ. Ein drittes Mal handeln sie wieder zusammen, und zwar gibt hiezu A sein anfängliches Kapital und noch 600 ℳ, beides auf 4 Monate, während das Kapital des B 5 Monate im Geschäft bleibt. Ihr gemeinschaftlicher Gewinn beträgt nun 6440 ℳ. — Wieviel betragen die erwähnten Kapitalien des A und B, wenn der Gewinn bei allen drei Geschäften verhältnismäßig gleich groß war?

1895. Ein Kaufmann ist seinen 3 Gläubigern A, B und C verschiedene Summen schuldig. Entlehnt er von B noch 240 ℳ und gibt davon dem A 90 ℳ und dem C 150 ℳ, so ist er dem A und C zusammen $2\frac{2}{3}$ mal soviel schuldig als dem B; borgt er aber von C 360 ℳ und gibt davon dem A 150 ℳ und B 210 ℳ, so ist er dem C $1\frac{3}{13}$ mal soviel schuldig, als A und B zusammen; entlehnt er aber endlich von A noch 150 ℳ und gibt davon dem B 60 ℳ und dem C 90 ℳ, so ist er dem B und C zusammen $1\frac{9}{10}$ mal soviel schuldig als dem A. Wieviel jedem?

1896. Schriftlich. 1) Es erbt jemand von seinem verstorbenen Onkel 5070 ℳ, die ihm 2 Brüder desselben nach 1 Jahre auszahlen sollen. Da er das Geld bar wünscht, muß er dem einen 5 %, dem andern $6\frac{1}{4}$ % Rabatt auf 100 gewähren und erhält bar nur 4800 ℳ.

a) Wieviel hätte er nach einem Jahre von jedem Bruder erhalten? b) Wieviel betrug bei jedem der Rabatt?

2) Ein Trapezoid mit 30 m, 36 m, 40 m und 50 m langen Seiten und einer Diagonale, die 54 m mißt, soll in ein inhaltsgleiches Rechteck verwandelt werden, dessen Seiten sich wie 1 : $1\frac{2}{3}$ verhalten. Welche Dimensionen muß dieses Rechteck erhalten?

3) Ein Gefäß hat die Form eines abgekürzten Kegels und ist bis an den Rand mit Alkohol vom spezifischen Gewicht = 0,792 gefüllt. Die Bodenfläche des Gefäßes hält 32,1536 qdm und die Oberfläche der Flüssigkeit 13,8474 qdm. Wieviel wiegt der Alkohol, wenn die Seitenlinie des Gefäßes 5 dm mißt?

Mündlich. 1) Das Produkt von $6\frac{2}{3}$ und einer andern Zahl ist $36\frac{2}{3}$; welches ist die Differenz zwischen dem Produkte und der Summe der beiden Zahlen?

2) Wie groß ist das spezifische Gewicht des Alkohols, wenn ein Körper in freier Luft 250 g, im Wasser 225 g und im Alkohol 230 g wiegt?

3) Das $1\frac{3}{4}$fache einer Zahl plus 65 ist gleich dem $2\frac{1}{3}$fachen derselben Zahl minus 19. Welche Zahl ist es?

4) Verkauft jemand das Pfund einer Ware um 24 ₰, so verliert er 150 ℳ; verkauft er aber den Zentner um 36 ℳ, so gewinnt er 20 %. Wie viele Zentner stehen im Handel?

5) Jemand erübrigt von seiner jährlichen Einnahme 150 ℳ, d. i. $11\frac{1}{9}$ %. Im folgenden Jahrgang steigt $\frac{1}{3}$ seiner Ausgaben um 5 %, $\frac{1}{3}$ um $12\frac{1}{2}$ % und $\frac{1}{3}$ um 15 %. Wieviel hat er bei derselben Einnahme jetzt übrig?

6) Wieviel siedendes Wasser zu + 80° R und wieviel kaltes zu + 8° R müssen zusammengegossen werden, um 36 hl Wasser von + 24° R zu erhalten?

7) Ein Arbeiter erhielt für 8 Tage Arbeit 2 hl Roggen und 2 ℳ, ein andermal für 11 Tage $2\frac{1}{2}$ hl Roggen und 5 ℳ. Wie hoch wurde 1 hl Roggen gerechnet?

8) Die Summe dreier Kapitalien beträgt 2600 ℳ. Das erste Kapital steht zu 2, das zweite zu 3, das dritte zu 4 % aus. Wenn nun die drei Kapitalien in gleicher Zeit gleichviel Zins tragen, wie groß ist jedes?

9) Ein Kaufmann verkauft $\frac{1}{4}$ seiner Ware mit 4, $\frac{1}{5}$ derselben

mit 20 % Verlust, den Rest aber für 825 ℳ mit 25 % Gewinn. Wieviel löst er beim Verkauf?

10) Die Grundlinie eines Dreiecks, welche 36 m mißt, verhält sich zur Höhe des Dreiecks wie 6 : 5. In der Mitte der Höhe wird das Dreieck durch eine mit der Grundlinie parallele Linie getrennt. Wie viele qm enthält das dem Gipfel des Dreiecks anliegende Stück?

11) Jemand möchte an einer Ware 8,25 ℳ gewinnen. Gibt er 1 kg um 4,25 ℳ, so gewinnt er an derselben $16\frac{1}{2}$ ℳ; gibt er 1 kg um $2\frac{1}{2}$ ℳ, so verliert er $2\frac{3}{4}$ ℳ. Wie teuer mußte er das kg verkaufen?

12) Wieviel wiegt eine eiserne Kugel von 3 cm Durchmesser, wenn das spezifische Gewicht des Eisens 7,2 ist? $\pi = 3\frac{1}{7}$.

1897. 1) Jemand bezieht aus zwei auf Zinsen liegenden Kapitalien monatlich zusammen 300 ℳ Zinsen. Von einem Kapital erhält er in 7 Monaten 200 ℳ mehr, als von dem andern im ganzen Jahre.

a) Wieviel Zinsen bezieht er aus jedem Kapital jährlich?

b) Wie groß ist jedes Kapital, wenn jedes zu 4 % angelegt ist?

2) Von einem Rhombus beträgt die Seite 2,4 m, die Höhe 1,5 m; wie groß sind beide Diagonalen?

3) Eine Pyramide aus Sandstein hat zur Grundfläche ein reguläres Dreieck; wenn jede Grundkante 4 m und jede Seitenkante 5 m mißt, welches ist die Oberfläche der Pyramide und wieviel wiegt dieselbe, wenn das spezifische Gewicht des Sandsteins zu 2,7 angenommen wird?

7. In Unterfranken.

1886. 1) Zur Herstellung eines Fabrikgebäudes gibt jemand $\frac{7}{12}$ der Kosten; später verkauft er von seinem Anteil $\frac{2}{5}$ mit 10 % und den Rest mit $16\frac{2}{3}$ % Gewinn und nahm im ganzen 47880 ℳ ein. Wie hoch haben sich die Herstellungskosten für die Fabrik belaufen?

2) 3 Gemeinden, A, B und C, von denen A 750, B 875 und C 1000 Einwohner zählt, unternahmen den Bau einer Brücke, von welcher A 2,4, B 3,2 und C 4 km entfernt sind. Sie bestreiten die Baukosten nach den geraden Verhältnissen ihrer Einwohnerzahl und im umgekehrten Verhältnis ihrer Entfernung von der Brücke. Die Gemeinde A hat infolgedessen 300 ℳ mehr zu zahlen, als B. a) Was kostet der Bau der Brücke, b) welche Summe hat jede Gemeinde beizutragen?

3) Ein Kapital, zu einem gewissen Zinsfuß ausgeliehen, wächst durch die einfachen Zinsen in 10 Jahren auf 3600 ℳ an. Würde dasselbe Kapital zu 1 % höher ausstehen, so würde es nach Verlauf von 8 Jahren mit den einfachen Zinsen 3552 ℳ betragen. Wie groß ist das erwähnte Kapital und zu wieviel % ist es ausgeliehen?

1888. 1) A fängt ein Geschäft mit 3000 ℳ an. Nach 6 Monaten tritt B mit 1800 ℳ und C mit 2000 ℳ ein. Nachdem sie 10 Monate gehandelt haben, tritt D der Gesellschaft bei, kauft dem A 1200 ℳ, dem B 400 ℳ ab und legt außerdem noch 600 ℳ dazu. Nach 8 Monaten nehmen sie E auf, der dem A 200 ℳ, dem B ebenfalls 200 ℳ abkauft und 1000 ℳ selbst beiträgt. 4 Monate später trennt sich die Gesellschaft mit einem Gewinne von 13272 ℳ. Wieviel erhält jeder, wenn A und C wegen besonderen Dienstleistungen $12\frac{1}{2}$ %, resp. 5 % mehr erhalten, als ihnen nach dem Verhältnis ihrer Einlage zukommt?

2) Ein Kaufmann empfängt eine Warensendung im Bruttogewicht von 6 Zentner. Die Tara beträgt 6 %; außerdem wird noch vom Nettogewicht $\frac{1}{2}$ % Gutgewicht (in ganzen Pfunden) abgerechnet. Bei Öffnung der Sendung ergibt sich, daß 190 Pfund der Ware beschädigt sind. Während das Pfund der guten Ware zu 2 ℳ veranschlagt ist, wird für die beschädigte ein besonderer Preis von 1,20 ℳ vereinbart. Wieviel wird nun beim Wiederverkauf der Ware gewonnen, wenn das Pfund der ersteren zu 2,70 ℳ, das der letzteren aber nur zu 1,05 ℳ angebracht wird?

1889. A und B hatten gemeinsam eine Fabrik bauen lassen; 80 % aller Kosten waren von A bestritten worden. Dieser verkaufte später $\frac{5}{8}$ seines Anteils an C; den Rest seiner Ansprüche zahlte auf Wunsch B bar aus. A legte nun diesen Rest zinsbringend an und zwar $\frac{3}{4}$ des Betrages zu 4 % auf 2 Jahre 6 Monate, das Übrige zu 5 % auf 3 Jahre. Die von A ausgeliehenen Kapitalien entziffern einschließlich der einfachen Zinsen 267000 ℳ. a) Wie hoch beliefen sich die Baukosten der Fabrik? b) Wie groß waren die beiden von A verzinslich angelegten Kapitalien? c) Was wiegen die genannten 267000 ℳ, wenn dieselben nur mit deutschen Kronen, von denen jede 3,5838 g feines Gold enthält, bezahlt worden sind und in den deutschen Reichsgoldmünzen die Masse des Kupfers sich zu der des Goldes wie 1 : 9 verhält?

1890. 1) Von 2 Personen, welche gleichviel Vermögen be-

saßen, hat die erste ihr Geld um $\frac{1}{2}$ % höher ausgeliehen, als die zweite. Das Vermögen der ersten war dadurch in 8 Jahren und 4 Monaten auf 13750 ℳ, das der zweiten in 9 Jahren und 9 Monaten auf 13900 ℳ angewachsen. Wie groß war das Vermögen einer jeden Person und zu wieviel % hatte jede dasselbe angelegt?

2) 38,5 kg einer aus 3 Teilen Silber und 4 Teilen Kupfer bestehenden Legierung sollen so mit Kupfer versetzt werden, daß sich das Silber zum Kupfer wie 1 : $3\frac{1}{2}$ verhält. Wieviel Kupfer muß zu der Mischung gesetzt werden?

1891. 1) Man hat dreierlei Waren, welche zusammen 552 ℳ 50 ₰ kosten. Das Pfund jeder Sorte kostet sovielmal 10 ₰ als man davon Pfund hat. Die zweite wiegt um ein Drittel mehr als die erste und die dritte Sorte $3\frac{1}{2}$ mal soviel als die zweite. Wieviel Pfund hat man von jeder Sorte? (q.)

2) Von zwei Kapitalien geben $\frac{1}{4}$ des ersteren zu $3\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{5}$ des zweiten zu $4\frac{1}{4}$ % zusammen in 6 Jahren 327,90 ℳ Zins. Der Rest des ersteren Kapitals zu $5\frac{1}{2}$ % und der Rest des zweiten zu $4\frac{3}{4}$ % geben in 2 Jahren zusammen $277\frac{1}{5}$ ℳ. Wie groß ist jedes der beiden Kapitalien?

1892. 1) Für die Familie eines Verunglückten wollen mehrere Personen durch gleichmäßige Beiträge 600 ℳ zusammenschießen. Als weitere 2 Wohlthäter sich zur Unterstützung der armen Familie bereit erklärt hatten, traf nun jede beitragende Person 15 ℳ weniger. Man bestimme die anfängliche Zahl der Wohlthäter und den Betrag, welchen jeder leisten wollte! (q.)

2) Nach dem Ableben ihres Mannes verkauft die Frau Geschäft und Liegenschaften und hat nach Begleichung aller Verbindlichkeiten noch 18560 ℳ reines Vermögen. Dazu erhält sie noch aus einer Lebensversicherung 10000 ℳ ausbezahlt. Sie legt nun am 5. Mai ihr Vermögen folgendermaßen an: 1. 8000 in 5 %iger erster Hypothek, 2. 6000 ℳ in $5\frac{1}{2}$ %iger zweiter Hypothek, 3. 12000 ℳ in 4 % Staatsanlehen, die sie im Kurse zu 104,5 kauft (Zinstage $\frac{1}{1}$ und $\frac{1}{7}$), 4. 1500 ℳ in einer Sparkasse, die $3\frac{3}{4}$ % Zins bezahlt; den Rest behält sie zurück. Wie groß ist dieser? Wieviel Zins nimmt sie jährlich ein?

1895. 1) Von einem Stück Zeug, das 80 m hält, verkauft jemand einen Teil mit Gewinn von 30 ₰ auf 1 m. Der Rest aber mußte mit 25 ₰ Verlust per m weggegeben werden, und es beläuft

sich der Gewinn beim ganzen Geschäfte auf 10 ℳ 80 ₰. Wie viele Meter werden mit Gewinn und wie viele mit Verlust abgegeben?

2) Ein Kapitalist hat $\frac{2}{5}$ seines Geldes auf Eisenbahn-Aktien, $\frac{1}{3}$ desselben auf Ländereien und den Rest auf Bergwerks-Aktien verwendet. Durch die ersteren erhält er einen jährlichen Gewinn von 13%, durch die Ländereien einen Gewinn von 9%, dagegen muß er zu den Bergwerken eine jährliche Zubuße von 3% geben. Wenn ihm nun im ganzen aus seinem Gelde ein jährlicher Gewinn von 2664 ℳ erwächst, wie groß ist sein Kapital?

1896. 1) Drei Kapitalien betragen zusammen 10500 ℳ; das eine ist zu 5%, das andere zu 4, das dritte zu 3% ausgeliehen. Die Zinsen betragen zusammen 399 ℳ und zwar die Zinsen vom zweiten Kapital 2 ℳ weniger als vom ersten. Wie groß ist jedes Kapital?

2) Ein Holzhändler hat zweierlei Sorten Brennholz im Werte von 1866 ℳ vorrätig. Von der ersten Sorte verkauft er den Ster zu 11 ℳ, von der zweiten zu 7,50 ℳ. Nachdem er von der ersten Sorte $\frac{2}{3}$ und von der zweiten $\frac{2}{5}$ des Vorrats verkauft hatte, war der Rest noch 882 ℳ wert. Wieviel Ster hatte er von jeder Sorte?

3) Bei einem Feldstück von der Form eines Paralleltrapezes sind die nichtparallelen Seiten einander gleich. Die Parallelen sind 165 m und 97 m lang und ihr Abstand mißt 120 m. Wie groß ist der Umfang des Grundstückes, wie viele a enthält die Fläche?

4) Die Radien der Grundflächen eines abgekürzten Kegels sind 1,25 m und 0,6 m lang; die Mantelfläche beträgt 29,045 qm. Wie groß ist die Seitenlinie und die Höhe des abgekürzten Kegels?

1897. Schriftlich. 1) Jemand hatte 20000 ℳ vierprozentige bayr. Eisenbahn-Obligationen im Kurse zu $103\frac{3}{8}$ gekauft. Diese Obligationen werden in $3\frac{1}{2}$ prozentige convertiert. Er entschließt sich jetzt, da dieselben noch im Kurse zu $101\frac{1}{4}$ stehen, damit 15 Stück 4prozentige österreichische Eisenbahn-Obligationen à 400 ℳ im Kurse zu $104\frac{1}{2}$ zu kaufen und die übrigen bayr. Obligationen zu convertieren. a) Wie viele Zinsen nahm er früher ein, wie viele jetzt? b) Zu wieviel Prozent rentierte beim ersten Ankauf seine Geldauslage; zu wieviel Prozent rentiert jetzt seine Gesamtauslage? (Auf 2 Dezimal.)

2) Ein Stück Feld hat die Form eines Paralleltrapezes mit rechten Winkeln an der einen 51 m langen Seite. Die größere Pa-

rallele ist 110 m lang und die kleinere Diagonale 25 m kürzer, als diese. Was ist das Stück wert, wenn ein a mit 15 *M* bezahlt wird?

3) In die Bodenfläche einer regulären sechsseitigen Pyramide von 2,7 m Höhe ist ein Kreis von 0,8 m Durchmesser so eingezeichnet, daß die Grundkanten Tangenten sind. Wie groß ist das Gewicht, wenn die Pyramide massiv aus Sandstein (spez. Gewicht 2,5) gearbeitet ist?

Kopfrechnen. **1)** Wie hoch kommt der Kalkbewurf einer Giebelseite eines Hauses à qm 1,50 *M*, wenn dieselbe aus einem Rechtecke von 12 m Breite und 8 m Höhe und einem Dreiecke von 5 m Höhe besteht?

2) Jemand, der jährlich 1620 *M* Zins einnahm, hatte $\frac{3}{4}$ seines Kapitals zu 4 % und den Rest zu 6 % angelegt. Wie groß war das Kapital?

3) In einem kreisrunden Wasserturm von 2 m Durchmesser steht das Wasser 3 m hoch; welches Gewicht hat dasselbe?

4) Ein Metzger kauft 6 Ochsen und 5 Schafe für 1600 *M*; ein anderer kauft bei gleichen Preisen 3 Ochsen und 9 Schafe für 930 *M*. Wie hoch kam ein Ochse, wie hoch ein Schaf?

5) 2 Personen verzehren zusammen in 10 Tagen 36 *M*. A hat täglich 40 *ℳ* mehr verzehrt als B. Wieviel beträgt das tägliche Zehrgeld eines jeden?

6) Die gleichliegenden Seiten zweier ähnlicher Dreiecke sind 10 und 15 m lang. Wie viele qm mißt das größere, wenn das kleinere 40 qm Inhalt hat?

7) Ein Bleiwürfel wiegt $1\frac{3}{8}$ kg. Wie groß ist eine Würfelkante und wie groß ist die ganze Oberfläche des Würfels, wenn das spez. Gewicht des Bleies zu 11 angenommen wird?

8) Eine Frau A spinnt einen gewissen Vorrat Flachs in 48 Tagen, B in 36 Tagen; C spinnt täglich $\frac{1}{16}$ Pfd. mehr als B. Spinnen sie alle zusammen, so werden sie in 12 Tagen fertig. Wie viele Pfd. Flachs betrug dieser Vorrat?

9) Wird eine Seite eines Quadrates 3 cm länger, so entsteht ein neues Quadrat, das 51 qcm mehr Flächeninhalt hat, als das ursprüngliche. Wie groß war die Seite des ersten Quadrates?

10) Ein Kurier legt am ersten Tag $\frac{5}{12}$, am zweiten $\frac{3}{10}$ und am dritten $\frac{1}{6}$ seines Weges zurück und hat nun noch 56 km zu machen. Wie lang ist der Weg?

8. In Schwaben.

1883. 1) Jemand hat 540 l Spiritus zu 75°. Er soll 1000 l zu 64° liefern. Wieviel Spiritus zu 60° und wieviel Wasser muß er zusetzen?

2) A wird durch testamentarische Bestimmung verpflichtet, dem B nach $3\frac{1}{2}$ Jahren ein Kapital von 3750 ℳ auszuzahlen. B wünscht sogleich in den Besitz des Kapitals zu kommen. Er bewilligt daher dem A bei sofortiger Bezahlung einen Diskonto von 6 % per anno. Wieviel müßte A, wenn er darauf einginge, sofort bezahlen?

3) Ein Wirt hat 3 Zimmer mit Gästen. In jedem Zimmer verzehren alle Gäste gleichviel. Im 2. Zimmer sind 3 Personen mehr, und jede Person verzehrt um 50 ₰ mehr, als jede im ersten. Im 3. Zimmer sind 7 Personen mehr, und jede verzehrt 90 ₰ mehr, als jene im ersten. Im 2. Zimmer werden im ganzen 11,30 ℳ und im 3. 26,50 ℳ mehr verzehrt, als im ersten. Wieviel wird in allen 3 Zimmern verzehrt?

1886. Von vier am 1. März ausgestellten Wechseln à 450 ℳ ist der erste am 19. März, der zweite am 25. März, der dritte am 4. April und der vierte am 16. April fällig. An welchem Tage könnten sie gemeinschaftlich bezahlt werden, vom 1. März an gerechnet?

1887. 1) A und B haben zusammen 6500 ℳ zu gleichen Prozenten ausgeliehen. Nach zwei Jahren erhielt A an Kapital und Zins 4400 ℳ und B nach 3 Jahren 2875 ℳ zurück. Welches Kapital hatte jeder ausgeliehen und zu welchem Zinsfuß? (q)

2) Eine Anzahl Arbeiter verdiente bei einer Arbeit an einem Tage eine gewisse Summe. Wären es 5 Arbeiter mehr gewesen und hätte jeder Arbeiter 60 Pfennig mehr erhalten, so würde die verdiente Summe im ganzen 30 ℳ größer sein. Wären es aber 3 Arbeiter weniger gewesen und hätte jeder 40 Pfennig weniger erhalten, so würde die verdiente Summe 15,80 ℳ weniger betragen. Wieviel Arbeiter waren es und wieviel verdiente jeder?

1888. 1) Ein Kapital wächst in 10 Monaten mit den Zinsen auf 5250 ℳ und in 18 Monaten auf 5450 ℳ. Wie groß ist das Kapital und zu wieviel Prozent ist es ausgeliehen?

2) Wenn man aus einer um 8 Einheiten vermehrten Zahl die Quadratwurzel zieht, so ist die sich ergebende Wurzel um 2 mehr, als die Quadratwurzel aus der Hälfte jener Zahl. Wie heißt diese?

1890. 1) Zwei Größen stehen zu einander in dem Verhältnisse wie a : b. Nachdem aber von jeder c weggenommen worden, verhielten sie sich wie m : n. Welches sind die beiden Größen?

2) Drei Kaufleute A, B und C, vereinigen sich zu einem Handelsgeschäfte. A legt $\frac{1}{2}$ soviel ein als C oder 2000 ℳ weniger als B. Vom Gewinn von 6500 ℳ erhält C 3000 ℳ. Wieviel hat jeder eingelegt?

1891. 1) Jemand soll an den folgenden Terminen die mitbezeichneten Summen bezahlen, a M. nach p, b M. nach qu, c M. nach r, d M. nach s und e M. nach t Monaten. Nach wieviel Monaten kann er die Summen (a + b + c + d + e) ohne Nachteil für den Gläubiger und Schuldner auf einmal entrichten?

2) Ein Wechsel wird mit 521,50 ℳ bezahlt, nachdem bei 6 % Diskonto ein Abzug von 3,50 ℳ gemacht worden war. Wieviel Tage hätte der Wechsel noch zu laufen gehabt?

3) Man nimmt zu einer Mischung 120 ℔ à 50 ₰, 69 ℔ à 60 ₰, 80 ℔ à 90 ₰ und eine gewisse Anzahl von ℔ einer vierten Sorte, von welcher das ℔ 84 ₰ kostet. Wieviel ℔ müssen von dieser vierten Sorte genommen werden, damit 1 ℔ der Mischung auf 72 ₰ zu stehen kommt?

1892. 1) $\frac{4x}{3} + \frac{2x}{5} + 11 - \frac{x}{7} = x + 631.$

2) B hat 2000 ℳ, C 5000 ℳ mehr ausgeliehen als A. Dazu hat B sein Kapital um $\frac{1}{2}$ % und C um 1 % höher angelegt als A. Es bezieht daher B jährlich 125 ℳ und C 320 ℳ Zinsen mehr als A. Wieviel ℳ Kapitalien hat jeder ausgeliehen und zu wieviel %?

3) Drei Maurer, A, B und C sollen eine Mauer aufführen. Gemeinschaftlich würden diese Mauer vollenden A und B in 12 Tagen, B und C in 20 Tagen, A und C in 15 Tagen. Wieviel Zeit würde jeder Maurer allein brauchen? In welcher Zeit würde die Arbeit vollendet sein, wenn die drei Maurer gemeinschaftlich arbeiten?

1895. A und B legen zu einer gemeinschaftlichen Unternehmung 5500 ℳ zusammen. A läßt sein Geld 6 Monate, B das seinige 8 Monate im Geschäft. Nach Beendigung desselben wurde der Gewinn nach Verhältnis der Einlage und Zeit verteilt und es bekam A als Einlage und Gewinn 2300 ℳ, B dagegen 4200 ℳ. Wieviel hatte jeder beigeschossen? (q.)

1897. Schriftlich. 1) $14 - (5x - 7)^2 - (9x - 11)^2 = 200 - (3 \cdot 5) \cdot (7x - 9) - (8x - 3) \cdot (9x - 7)$.

2) A, B und C treiben ein Kompagniegeschäft, in das B um den neunten Teil mehr eingelegt hat als C, der mit einem Kapitale von 57000 ℳ beteiligt ist. Vom jährlichen Gewinn erhielt B 252 ℳ mehr und A 216 ℳ weniger als C; wieviel hat jeder in das Geschäft eingelegt?

3) Die Oberfläche eines rechtwinkeligen Parallelepipedons beträgt 664 qm, die Breite ist um 2 m, die Höhe um 6 m größer als die Länge. Wie groß ist der Kubikinhalt?

4) Ein cylindrischer Dampfkessel ist 4 m lang und hat einen Durchmesser von 0,8 m. Derselbe ist so eingemauert, daß die vom Feuer berührte Fläche einem Kreisausschnitte von 130^0 angehört; wie groß ist die Heizfläche?

Mündlich. 1) Zieht man von einer Zahl 5 ab, so erhält man ebensoviel, als wenn man sie durch 5 teilt. Wie heißt dieselbe?

2) Wie groß ist das geometrische Mittel, wenn die äußeren Glieder einer geometrischen Proportion 5 und $12\frac{4}{5}$ heißen?

3) Legt man zu einer Zahl 2, zum Drittel dieser Summe 5 und zum Drittel der neuen Summe 2, so hat man $\frac{1}{2}$ der ursprünglichen Zahl. Wie heißt diese?

4) Die Summe zweier Zahlen beträgt 15, der Unterschied ihrer Quadrate 45; wie heißen die Zahlen?

5) A hat 90, B 40 ℳ. Wie oft muß A an B 3 ℳ abgeben, bis beide gleichviel besitzen?

6) A und B haben zusammen 140 ℳ. Das vierfache von A und das fünffache von B beträgt 640 ℳ. Wieviel besitzt jeder?

7) 520 ℳ, nach 6 Monaten zahlbar, werden mit 5 % pro Jahr rabattiert. Wieviel ist zu zahlen?

8) Zwei Kapitalien betragen zusammen 8000 ℳ. Das eine davon ist zu 5 %, das andere zu 4 % ausgeliehen. Die einjährigen Zinsen betragen 350 ℳ. Wie groß ist jedes Kapital?

9) Ein dreieckiger Weideplatz hat zur Grundlinie 54 m, zur Höhenlinie 48 m. Wie lang ist eine Seite einer quadratischen Wiese von gleichem Inhalt?

10) Die Grundfläche einer Pyramide hat $1\frac{1}{2}$ qm. Die Höhe beträgt $\frac{4}{5}$ m. Welchen Rauminhalt hat diese Pyramide?

11) Die Fläche einer kreisrunden Tischplatte hat 154 qdm. Wie groß ist der Durchmesser?

12) Bei einem abgekürzten Kegel mißt der Radius der unteren Grundfläche 8 dm, jener der oberen 6 dm. Welchen Rauminhalt hat dieser Kegelstumpf bei einer Höhe von 7 dm?

II. Aufgaben aus der Arithmetik und Raumlehre, welche bei den Austrittsprüfungen an bayerischen Seminarien gegeben wurden.

1. Oberbayern.

1896. 1) Ein Kapitalist hat sein Vermögen von 60000 *M* an 3 Personen zu $4\frac{1}{2}$ % ausgeliehen. A zahlt in 2 Jahren soviel Zins als B in 3 Jahren. C zahlt die in 2 Jahren fälligen Zinsen mit einem Wechsel und erhält einen Diskont von 27 *M* bei der Berechnung von $4\frac{1}{2}$ % für 200 Tage Kapital. Wieviel beträgt das jedes Schuldners?

2) In jedem von 3 Behältern befindet sich eine gewisse Quantität Wasser. Gießt man aus dem ersten 20 l in den zweiten, so enthält dieser das Doppelte von dem, was jener nun faßt. Gießt man aber 30 l aus dem ersten in den dritten, so enthält dieser 20 l weniger, als das Vierfache des ersten noch beträgt. Und gießt man endlich 25 l aus dem zweiten in den dritten, so enthält dieser 50 l weniger als das Dreifache des zweiten noch ausmacht. Wieviel Wasser fand sich ursprünglich in jedem Behälter?

3) Ein Haufen Sand hat die Gestalt eines Kegels. Sein Umfang am Boden beträgt 47,124 dm, eine gerade Linie von einem Umfangspunkte nach der Spitze ist 19,5 dm lang. Wie hoch ist der Kegel? Wieviel Sand enthält er? ($\pi = 3,1416$).

4) Die Summe der beiden Grundflächen eines senkrechten Cylinders von 345,576 qdm Oberfläche ist um 31,416 qdm kleiner als der Mantel. Wie groß ist a) eine Grundfläche? b) der Mantel? c) der Durchmesser? d) die Höhe? und e) der Inhalt des Cylinders? ($\pi = 3,1416$).

5) Eine Hohlkugel von 1256,64 qcm Oberfläche besitzt 1767,15 ccm hohlen Raum. Wie dick ist deren Wand? ($\pi = 3,1416$).

1897. 1) Ein Wohlthäter bestimmt die Summe von 108 *M* zur gleichen Verteilung unter die Armen einer kleinen Stadt. Da aber sechs von denen, welchen diese Wohlthat zugedacht war, der

Hilfe nicht mehr benötigt sind, so fallen dadurch jedem der übrigen Armen für seinen Teil 25 ₰ mehr zu, als sonst geschehen wäre. Wie viele Arme waren anfänglich vorhanden?

2) Der dritte Teil eines Kapitals zu 4 % und $\frac{2}{5}$ eines zweiten Kapitals zu 5 % geben zusammen in 6 Jahren 336 ℳ Zinsen. Der Rest des ersteren Kapitals zu 6 % und der Rest des zweiten zu 3 % geben zusammen in 7 Jahren 588 ℳ Zinsen. Wie groß ist jedes der beiden Kapitalien?

3) In einem Trapez wurden die Nichtparallelen bis zum Durchschnitte verlängert. Die eine Parallele mißt 20 m, die andere 75 m. Wie groß wird deren Abstand sein, wenn die Entfernung jenes Durchschnittspunktes von der kleineren Parallele 9 m beträgt?

4) Der Mantel eines geraden Kegels bildet abgewickelt einen Kreissektor, dessen Zentriwinkel 216° und dessen Fläche 188,4 qcm beträgt. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche dieses Kegels?

1898. 1) Ein Juwelier hat 2 Sorten Silber. Schmelzt er 10 kg der ersten mit 5 kg der zweiten Sorte zusammen, so ist die Mischung 0,686 fein; setzt er aber $7\frac{1}{2}$ kg der ersten Sorte mit $1\frac{1}{2}$ kg der zweiten zusammen, so hat die Mischung einen Gehalt von 0,624 fein. Von welchem Gehalt war jede der beiden Sorten?

2) In einem Eisenbahnzug befinden sich 295 Personen, und zwar verhält sich die Anzahl der Personen der I. Klasse zu jenen der II. Klasse wie 3 : 4 und die der II. Klasse zu jenen der III. Klasse wie 5 : 6. Zwei Billete der II. Klasse kosten soviel wie 3 Billete der III. Klasse, und ein Billet der I. Klasse kostet das $1\frac{1}{2}$ fache von einem Billet der II. Klasse. Für sämtliche Billete wurden 2808 ℳ gelöst. Wie viele Personen fuhren in jeder Klasse? Wieviel kostet je ein Billet?

3) Bei einem Würfel hat die Diagonale einer Seitenfläche, bei einem andern die Diagonale des Würfels selbst eine Länge von 7,2 dm. Um wieviel differieren die Oberflächen dieser Würfel?

4) Wieviel cbm hat der senkrechte Kreiskegel, dessen Höhe dem Radius der Grundfläche gleich ist, wenn der Inhalt der Grundfläche 1 qm beträgt? ($\pi = 3{,}1416$).

5) Der Umfang eines senkrechten Cylinders beträgt 15,708 dm, dessen Höhe 6,25 dm. Wie groß ist a) der Mantel, b) der Radius der Basis, c) die Oberfläche des Cylinders? ($\pi = 3{,}1416$).

2. Niederbayern.

1896. 1) Ein Kapital von 5000 *M* wurde in 2 getrennten Summen auf Zinsen verliehen, die kleinere Summe zu 2 % höher, als die größere. Der Zinsfuß der größeren Summe wurde später um 1 % vermehrt und der der kleineren um 1 % vermindert. Dadurch vermehrte sich der frühere ganze Zinsenbetrag um den vierten Teil. Wäre aber der Zinsfuß der größeren Summe um 1 % erhöht worden, ohne daß die Zinsprozente der kleineren sich verändert hätten, so wäre der ganze Zinsenbetrag um ein Drittel gestiegen. Welches waren diese Summen und zu welchen Prozenten wurde eine jede ausgeliehen?

2) Ein regelmäßiges Sechseck mit der Seite a wird in ein Quadrat verwandelt und mit der Diagonale dieses Quadrates als Radius ein Kreis beschrieben. Wie verhält sich der Inhalt des Sechseckes zur Kreisfläche?

3) Wie oft ist ein senkrechter Kegel, dessen Höhe h die Hälfte der Seitenlinie ist, in der Kugel enthalten, welche die Seitenlinie des Kegels als Radius hat?

1897. 1) Ein Kaufmann verkauft von einem Stück Tuch zuerst eine gewisse Anzahl Meter, mit einem Gewinn von 1 *M* 20 *₰* für das Meter. Nach einiger Zeit verkauft er wieder eine gewisse Anzahl Meter mit einem Verlust von 80 *₰* für das Meter. Aus beiden Geschäften ergibt sich ein Gewinn von 80 *M*. Hätte der Kaufmann soviel Meter mit Gewinn verkauft, als er mit Verlust verkaufte, und soviel mit Verlust, als er mit Gewinn verkaufte, so würde er bei beiden Geschäften zusammen seine Ausgabe für das Tuch gedeckt haben. Wieviel Meter verkaufte der Kaufmann mit Gewinn und wieviel mit Verlust?

2) Ein Viereck wird durch eine Diagonale in ein gleichseitiges und in ein rechtwinklig gleichschenkeliges Dreieck so zerlegt, daß die Diagonale des Vierecks die Hypotenuse des rechtwinklig gleichschenkeligen Dreiecks ist. Wie groß ist der Inhalt des Vierecks, wenn der Radius des um das gleichseitige Dreieck beschriebenen Kreises ein Länge von 2 m hat?

3) Der Inhalt einer regelmäßigen Pyramide, deren Grundfläche ein Quadrat und deren Höhe der Seite der Grundfläche gleich ist, beträgt 9 cbm. Wie groß ist der Inhalt einer Kugel, welche mit der Pyramide gleiche Oberfläche hat?

1898. 1) Die Quersumme einer dreizifferigen Zahl ist 15. Die Zahl, welche durch die beiden ersten Ziffern ausgedrückt wird, ist um 2 größer als das 9 fache der letzten Ziffer; addiert man aber zu der dreizifferigen Zahl 99, so erhält man eine Zahl, welche mit denselben Ziffern in umgekehrter Reihenfolge geschrieben ist. Wie heißt die Zahl?

2) Der Radius eines Kreisausschnittes von 4 qm Fläche und 24° 36′ Zentriwinkel ist der Durchmesser eines Kegels, der der Höhe der Bogenlänge des Kreisausschnittes gleich ist. Mantel, Oberfläche und Inhalt dieses Kegels sind zu berechnen.

3) Um ein regelmäßiges, sechsseitiges, gerades Prisma von 10 cm Grundkante und doppelt so großer Seitenkante ist ein Cylinder gelegt. Es soll die Oberfläche derjenigen Kugel berechnet werden, deren Volumen so groß ist, wie die Differenz der Rauminhalte von Cylinder und Prisma.

3. Rheinpfalz.

1896. 1) Zwei Brüder legten ihr Vermögen, je aus 48000 ℳ bestehend, in Staatspapieren an, und zwar kaufte A 4=, B 5 %ige. Der Kurs der Papiere stand so, daß B jährlich 400 ℳ Zins mehr einnahm, als A. Nach einiger Zeit waren beide Papiere um 3 % gestiegen; deshalb verkauften sie dieselben wieder, wobei A 60 ℳ mehr gewann, als B. Welches war der Kurs der Papiere beim Ankauf?

2) Um einen quadratförmigen Teich von 1,44 ha soll eine Parkanlage geschaffen werden, die überall gleich breit sein und dem Flächeninhalte nach $\frac{9}{16}$ des Teiches betragen soll. Welche Breite muß die Parkanlage erhalten?

3) Zwei gleichschenklige Dreiecke mit gemeinsamer Grundlinie haben zusammen einen Umfang von 216 m. Wenn sich der Umfang des einen zu dem des andern wie 5 : 4 verhält, und die Länge der gemeinsamen Grundlinie $\frac{1}{8}$ vom Umfange des kleineren Dreiecks beträgt, a) wie lang ist die gemeinsame Grundlinie, b) welche Ausdehnung haben die Schenkel der beiden Dreiecke, und c) wie groß ist der Inhalt des durch die beiden Dreiecke entstandenen Vierecks?

4) Wie groß ist der körperliche Inhalt und die gesamte Oberfläche eines geraden, 6seitigen Prismas, wenn die Seite der regulären Grundfläche 2,5 und die Höhe des Prismas 8,3 m beträgt?

5) Die Seitenhöhe eines geraden Kegelstumpfes ist 25 cm, der

Mantel beträgt 1177,5 qcm, die Oberfläche 1607,68 qcm. Wie schwer ist dieser Körper bei einem spez. Gewicht von 4,5? ($\pi = 3{,}14$).

1897. 1) Auf Wunsch stellt ein Zigarrenhändler für zwei seiner Kunden eine Partie Zigarren zurück, die ihnen besonders zusagen, und berechnet, daß der Vorrat für beide auf 8 Wochen reichen wird. Nach 4 Wochen verzieht der 1. Kunde und der 2. verbraucht von nun ab den ganzen Rest in 12 Wochen. Wie lange hätte der ursprüngliche Vorrat für jeden Kunden allein gereicht?

2) Zwei Brüder mußten das von ihren Eltern ererbte, zu einem bestimmten Zinsfuß ausgeliehene Geld im Betrag von 6500 *M* der allgemeinen Gleichstellung wegen ungleich teilen. Der eine erhielt nach 2 Jahren an Kapital samt einfachen Zinsen 4400, der andere aber erst nach 3 Jahren samt Zinsen 2875 *M* vom Schuldner zurückbezahlt. In welcher Weise haben sie den Nachlaß ihrer Eltern geteilt, und wieviel % hat er ertragen?

3) Ein Garten, aus einem Quadrate und einem Rechteck bestehend, hat einen Inhalt von 9248 qm. Die Breite des Rechteckes ist gleich der Länge einer Quadratseite, seine Länge aber 16,5 m größer als diese. Wie lang ist die Seite des Quadrates?

4) Ein Kegelstumpf hat eine Oberfläche von 19273,32 qcm; die Höhe beträgt 60 cm, die Seitenhöhe 65 cm. a) Wie groß ist der Inhalt? b) Wie groß sind Volumen und Oberfläche des größten Cylinders, welcher sich aus dem Kegelstumpf herstellen läßt? ($\pi = 3{,}14$).

5) Bestimme x und y aus folgenden Gleichungen!

$$\frac{1}{x - y} = \frac{3}{20} + \frac{1}{x + y};$$

$$20(x - y) = 7(x^2 - y^2) - 20(x + y).$$

1898. 1) Ein Rentner hat 3 Kapitalien ausgeliehen im Gesamtbetrage von 13800 *M*, das erste zu $3\frac{3}{4}$, das zweite zu $3\frac{1}{2}$ und das dritte zu 3 %. Die jährliche Zinseneinnahme beträgt 468 *M*, die Zinsen des zweiten Kapitals übersteigen jene des ersten um 54 *M*. Wie groß ist jedes der 3 Kapitalien?

2) Ein junger Mann läßt sich von einem Geldverleiher mit 40 *M* gegen Zins und Zinseszins aus der Not helfen. Nach Ablauf von 2 Jahren sollte der Schuldner außer dem Kapital noch 38,40 *M* für Zins und Zinseszins bezahlen. Wieviel % waren von dem Wucherer in Anrechnung gebracht worden?

3) Bei zwei konzentrischen Kreisen mißt der kleine Radius 12 cm

und das zu einem Zentriwinkel von 20° gehörige Ringstück 14,13 qcm. a) Wie groß ist der längere Radius? b) Wie groß sind Höhe, Seite und Inhalt jenes regulären Dreiecks, welches dem größeren Kreise eingeschrieben werden kann?

4) Eine gerade sechsseitige Pyramide von Gold hat 5 cm Höhe und eine Grundkante von 2 cm; das dazu verwendete Gold hat ein spez. Gewicht von 19,32 und kostet pro kg 2700 ℳ. Wieviel muß für die Pyramide bezahlt werden, wenn der Arbeitslohn des Goldschmiedes 46,52 ℳ beträgt?

5) $\sqrt{4x - 3} + \sqrt{5x + 1} - \sqrt{15x + 4} = 0.$

4. Oberpfalz.

1896. 1) Zu beweisen, daß die Formel für die Kugelhaube: $2r\pi h$ ersetzt werden kann durch die Formel: $a^2\pi$!

2) In und um einen Kreis von 8 m Durchmesser ist ein reguläres Dreieck beschrieben. Welchen Umfang hat jedes dieser Dreiecke?

3) Die Oberfläche eines Kegelstumpfes von 12 cm langer Seitenlinie beträgt $\pi \cdot 893$ qcm. Die Summe der Radien beider Grundflächen ist 31 cm. Wie groß ist jeder Radius?

4) Eine quadratische, abgestumpfte Metallpyramide, an welcher die Höhe 12, die Seitenflächenhöhe 13, die Kante der größeren Grundfläche 25 cm mißt, soll zu einer Kugel umgegossen werden. Wie groß wird der Radius der letzteren?

1897. 1) Ein Gutsbesitzer, der sein Vermögen in 2 Kapitalien ausstehen hat, und zwar das kleinere zu $4\frac{1}{2}$ %, das um 20000 ℳ größere zu 4 %, bestimmt, daß das Vermögen unter seine Kinder gleichmäßig zu verteilen sei. Er stirbt, und unmittelbar darauf sterben 2 seiner Kinder. Die Kosten der Beerdigung u. s. w. erheischen die Summe von 2200 ℳ oder gerade soviel, als die seither zu erhebenden Zinsen des größeren Kapitals für 3 und des kleineren für 4 Monate zusammen ausmachen. Wieviel erbt jedes Kind, wenn der Tod der beiden Geschwister jedem der übrigen Kinder 15000 ℳ mehr zuweist?

2) In einem rechtwinkeligen Dreieck von 384 qm Fläche mißt die Hypotenuse 40 m. Wie lang ist jede Kathete?

3) Um ein regelmäßiges Sechseck von 259,8 qm ($= 150\sqrt{3}$) Fläche wurde ein Kreis beschrieben. Wie groß ist die Fläche des über einer Sechseckseite liegenden Kreissegments?

4) Die Differenz der Radien zweier Kugeln beträgt 3 cm, die Differenz der Volumina 4182,48 ccm. Wie groß ist der Radius jeder Kugel?

1898. 1) Drei Kapitalien, die sich wie 2 : 5 : 9 verhalten und von welchen das erste zu $4\frac{1}{2}$, das zweite zu $2\frac{4}{5}$, das dritte zu $3\frac{1}{3}\,\%$ ausgeliehen ist, ertragen in einem Jahre zusammen 265 ℳ Zins. Wie groß sind die Kapitalien?

2) In einem gleichschenkligen Dreieck von 24 cm Höhe beträgt die Summe von Grundlinie und Schenkel 39 cm. Wie lang ist a) Grundlinie, b) Schenkel?

3) Um und in einem Würfel von 50 cm Kante werden Kugeln beschrieben. Wie groß ist die Oberfläche jeder Kugel, und wie verhalten sich die Volumina derselben?

4) In einem geraden, dreiseitigen Prisma, dessen Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck bildet, ist jede Grundkante 30 cm, die Höhenkante 40 cm lang. Wie groß ist der Mantel eines Cylinders, der sich in jenes Prisma gerade hineinschieben läßt?

5. Oberfranken.

1896. 1) A, B und C haben gewisse Summen Geldes auf Zinsen. B nimmt jährlich 145 ℳ weniger an Zinsen ein, als A; er hat sein Geld zwar $\frac{1}{2}\,\%$ höher ausstehen, als A, aber sein Kapital ist um 5000 ℳ kleiner als das des A. C nimmt 283,75 ℳ mehr an Jahreszinsen ein als B, da sein Kapital zwar um 2 % niedriger aussteht, als das des B, aber um 6250 ℳ größer ist als das des A. Wie groß sind die Kapitalien der 3 Personen und zu wieviel % steht jedes aus?

2) In einen abgestumpften geraden Kegel von 1461,67 qcm Oberfläche und mit 12,5 und 4,5 cm langen Radien ist eine Kugel gelegt. Wieviel beträgt der Unterschied im Inhalt der beiden Körper?

3) Zwei Seiten eines Dreieckes messen 8 und 26 dm; die zur 26 dm langen Seite gehörige Höhe beträgt 7 dm. Welchen Inhalt hat ein um dieses Dreieck beschriebener Kreis?

1897. 1) Ein quadratischer Pyramidenstumpf vom 1520 ccm Inhalt und 15 cm Höhe hat 12 cm lange Grundkanten. Welches ist: a) seine Oberfläche, b) die Oberfläche eines Kegels von gleichem Inhalt und gleicher Höhe?

2) In dem Trapez ABCD messen die Parallelen AB und CD

14 cm und 11 cm; Schenkel AD = 13 cm; Diagonale BD = 15 cm. a) Wie groß ist sein Inhalt? b) Welchen Inhalt hat der gerade Kegelstumpf, den man erhält, wenn man ein gleichschenkliges Trapez von gleichen Grundlinien und gleichem Inhalt um seine Höhe als Achse 180° dreht?

3) Zwei Warenrechnungen, deren Ziel um 3 Monate differiert, werden gegen 10 % jährlichen Rabatt (in 100) bar bezahlt und zwar die erste mit 760, die zweite mit 1480 ℳ. Die Beträge der beiden in Rechnung gestellten Summen machen zusammen 2400 ℳ aus. Wann war jede Summe zu bezahlen?

1898. 1) Von zwei Kapitalien ist das zweite um 3500 ℳ größer als das erste und steht $\frac{1}{2}$ % niedriger aus als jenes, bringt aber jährlich 60 ℳ mehr Zins. Stünde es aber zum Zinsfuß des 1. Kapitals und dieses zum Zinsfuß des 2. aus, so brächte es 202,5 ℳ mehr Zins als das erste. Welches sind die Kapitalien, und zu welchem Zinsfuß stehen sie aus?

2) Die Grundlinien eines Trapezes messen 12 m und 30 m, von den beiden Schenkeln ist der eine 12, der andere 15 m lang. Wenn nun die Schenkel bis zum Durchschnittspunkte verlängert werden, welchen Umfang hat der in das entstandene Dreieck beschriebene Kreis?

3) Die Summe aus dem Radius und der Höhe eines geraden Cylinders mißt 17 cm; die Gerade, welche die Mitte der oberen Grundfläche mit einem Punkte der Peripherie der unteren verbindet, mißt 13 cm. Wie groß ist die Oberfläche?

6. Mittelfranken.

1896. 1) Ein Gutsbesitzer hat 48000 ℳ Schulden auf seinem Grundbesitze, der auf 148000 ℳ taxiert ist; es bleiben ihm nach Abzahlung der Zinsen 6720 ℳ als Erträgnis seines Vermögens; wäre seine Schuld um 18000 ℳ geringer und hätte er die übrigen um $\frac{1}{2}$ % niedriger zu verzinsen, so wäre das Erträgnis seines Vermögens 960 ℳ höher. Wie hoch hatte er seine Schuldsumme zu verzinsen und wieviel Prozent betrug das Erträgnis seines Vermögens?

2) Ein gleichschenkliges Paralleltrapez hat einen Flächeninhalt von 531,2 qm. Jede der konvergenten Seiten mißt 20 m. Wie groß sind die beiden parallelen Seiten, wenn deren Abstand 16 m beträgt?

3) Es wird parallel zu dem größten Kreis einer Kugel, deren Radius r = 4 cm beträgt, ein Kreis durch dieselbe gelegt, der vier-

mal so klein als jener ist. Welches Volumen hat das zwischen diesen beiden Ebenen liegende Stück der Kugel?

1897. 1) Ein Landwirt mengt 2 Sorten Getreide untereinander, von denen das hl $8\frac{2}{5}$, resp. $10\frac{1}{2}$ *M* kostet. Von der geringeren Sorte nimmt er 6 hl mehr als von der besseren Sorte, so daß 1 hl der Mischung den Wert von 9 *M* hat. a) Wieviel hl enthält die ganze Mischung? b) Wieviel hl von jeder Sorte wurden untereinander gemengt?

2) Der Mantel eines abgestumpften Kegels, dessen Seitenhöhe 72 cm ist, beträgt 18086,4 qcm. Wie groß sind die Radien der beiden Grundflächen, wenn sich erstere (die Radien) wie 3 : 2 verhalten? Wie hoch ist dieser Kegelstumpf, und welchen Kubikinhalt hat er?

3) In den Abständen $H = 18$ cm und $h = 6$ cm von demselben Pol einer Kugel, deren Radius $r = 30$ cm beträgt, werden zwei parallele Ebenen durch die Kugel gelegt; wie groß ist das Volumen und die Oberfläche des zwischen diesen Ebenen liegenden Stückes der Kugel?

1898. 1) Ein Ökonom hat 3 Grundstücke im Werte von 10250 *M*, welche einen jährlichen Gewinn von 365 *M* abwerfen, wenn man die Rente des 1. Grundstückes zu 3 %, die des 2. zu 3,5 % und die des 3. zu 4 % annimmt. Der Reinertrag des 3. Grundstückes beträgt 12 *M* weniger als der des zweiten. Welches ist der Wert eines jeden Grundstückes?

2) Wie groß ist die Seite eines in einem Kreise von 12 cm Radius eingeschriebenen Zwölfeckes und welches ist sein Flächeninhalt? Welchen Inhalt hat der Kreisabschnitt über einer Zwölfeckseite?

3) Es soll ein Hügel von der Form eines abgestumpften Kegels abgetragen werden. Der Radius der Basis mißt 6 m, der der Deckfläche 3 m, und die Seitenlinie beträgt 7 m. Zur Fortschaffung des Erdreichs benützt man einen Karren, dessen hohler Raum die Gestalt eines geraden Pyramidenstumpfes mit quadratischen Grundflächen hat; die Kanten der letzteren sind im Lichten 0,5 m und 0,6 m lang, und die Entfernung der beiden Grundflächen voneinander mißt 0,9 m. Wie viele cbm Erdreich enthält der Hügel, und wievielmal muß der Karren gefüllt werden, wenn sich die Masse des festen Erdreichs zur Masse des lockeren wie 2 : 3 verhält?

7. Unterfranken.

1896. 1) Ein Verein hatte eine Ausgabe von 270 ℳ zu leisten, wozu alle Mitglieder gleichmäßig beitrugen. Im nächsten Jahre stiegen die Ausgaben um $6\frac{2}{3}$ %, die Mitglieder aber wurden um 9 weniger, und es mußte deshalb jedes Mitglied 2 ℳ mehr bezahlen. Wie viele Mitglieder waren es anfangs und was hatte jedes zu zahlen?

2) Drei Personen legen zu einem Geschäft eine gewisse Summe zusammen. B legt die Hälfte mehr als A, C 500 ℳ mehr als A und B zusammen ein. Nach 6 Jahren löst sich das Geschäft auf und der sich auf 12000 ℳ belaufende Gewinn wird so verteilt, daß C hievon 6120 ℳ erhält. a) Wieviel hat jede Person eingelegt? b) Wie groß ist der Gewinn des A, wie groß der des B? c) Wie viele % wurden gewonnen?

3) In ein cylindrisches Gefäß, dessen Boden 0,22 m Durchmesser hat, welches teilweise mit Wasser gefüllt ist, wird ein Stein gelegt. Dadurch stieg das Wasser um 5 cm. Welches Volumen und welches Gewicht (spez. Gew. 2,4) hat der Stein?

4) Der Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks beträgt 864 qm, wobei die Hypotenuse 60 m mißt. Man bestimme den Umfang des Dreiecks.

1897. 1) Von einer Sendung, Zucker und Kaffee enthaltend, erhält B 2 kg Zucker weniger und 1 kg Kaffee mehr als A, C 2 kg Zucker und 15 kg Kaffee mehr als A. Es findet sich, daß B 2 mal, C aber 3 mal soviel Kaffee als Zucker erhalten hat. Wie viele kg Zucker und Kaffee enthielt die Sendung?

2) Ein Haus war zu $1\frac{1}{2}$ ‰, das Mobiliar zu 0,8 ‰ gegen Brandschaden versichert, und es wurden jährlich 94,80 ℳ Prämien bezahlt. Später wird das Haus um $\frac{1}{10}$ höher, das Mobiliar um den 5. Teil geringer eingeschätzt und nun mußte der Besitzer jährlich 102,84 ℳ bezahlen. Wie hoch waren Haus und Mobiliar anfangs versichert?

3) Die beiden Grundflächen eines abgestumpften Kegels haben 78,5 und 12,56 qcm Flächeninhalt. Die Seitenlinie mißt 5 cm. Wie groß ist a) die Mantelfläche, b) der kubische Inhalt?

4) Ein gleichschenkliges dreieckiges Grundstück hat bei einer Schenkellänge von 255 m eine Fläche von 2,7 ha. Wie groß ist der Umfang dieses Feldes?

1898. 1) Eine aus Kupfer und Zinn bestehende Legierung wiegt 344 g, im Wasser nur 299 g. Wieviel von jedem Metall enthält die Legierung a) dem Gewichte, b) dem Volumen nach, wenn das spez. Gew. des Kupfers zu 8 und das des Zinns zu 7 angenommen wird?

2) Ein Kapital von 875 *M*, welches ein Jahr länger aussteht als die Zahl der Prozente beträgt, zu denen es ausgeliehen ist, bringt 175 *M* Zinsen. Wie lange stand es aus und zu welchem Zinsfuß?

3) In einem dreieckigen Stück Feld mit einem rechten Winkel wird die größere Seite durch eine auf dieselbe aus der Ecke des rechten Winkels gezogene Senkrechte in 2 Stücke von 90 und 160 m zerlegt. Wie viele a Flächeninhalt hat das Stück und wie lang sind die beiden anderen Seiten?

4) Die Summe der Grundflächen eines regulär vierseitigen Pyramidenstumpfes beträgt 0,2 qm; das Volumen entziffert 22400 ccm. a) Wie hoch ist der Pyramidenstumpf? b) Wie groß der Mantel dieses Körpers? c) Welches Volumen besitzt die Ergänzungspyramide, wenn deren Grundfläche $\frac{1}{4}$ von der Basis des Pyramidenstumpfes beträgt?

8. Schwaben und Neuburg.

1896. 1) Zwei Kapitalien betragen zusammen 11910 *M* und geben in $3\frac{1}{2}$ Jahren an Zinsen 1956,5 *M*. Wie groß ist jedes, wenn das eine zu 4 %, das andere zu 5 % aussteht?

2) Aus folgender Gleichung soll der Wert für x bestimmt werden:

$$\frac{84}{x} - \frac{180}{x+2} + \frac{60}{x-8} = 0.$$

3) Eine rhomboidische Waldparzelle hat einen Flächeninhalt von 2472 qm. Eine Linie, welche die entferntesten Eckpunkte miteinander verbindet, mißt 93 m. Welchen Umfang hat der Wald, wenn eine der längeren Seiten 80 m hält?

4) Eine Kugel von r cm Radius soll auf die Hälfte ihres kubischen Inhaltes (unter Beibehaltung der Kugelgestalt) verkleinert werden. Um wieviel nimmt dabei der Radius ab?

1897. 1) Welches ist der Wert von x aus folgender Gleichung: $(5x - 4)^3 - (2x + 4)^3 - 189 = (5x - 2)^3 - (2x + 9)^3$.

2) A entrichtet für eine bestimmte Summe, die er nach 4 Monaten zu zahlen schuldig ist, — nach Abzug eines gewissen Prozentsatzes für den jährlichen Diskont — 2324 *M* bar. B bezahlt für die nämliche Schuldsumme, die nach 9 Monaten zur Zahlung fällig ist — bei dem-

selben jährlichen Prozentsatze für den Diskont — 2229 ℳ bar. Wie viele ℳ war jeder zu zahlen schuldig, und wie viele Prozente betrug der jährliche Diskont?

3) Eine Dachfläche bildet ein gleichschenkliges Trapez von 32 m Umfang. Wie viele qm Zinkblech sind zum Eindecken dieser Dachfläche nötig, wenn die kleinere Parallelseite 8 m und eine der nicht parallelen Seiten 5 m mißt?

4) Ein Gefäß von der Form eines abgekürzten Kegels soll 464,72 ccm fassen und oben 2 cm weiter als unten sein. Wie groß sind die beiden Durchmesser zu nehmen, wenn die Höhe des Gefäßes 12 cm beträgt?

1898. 1) $84 - (2x - 1)^2 + (6x - 7)^2 = (7x - 8)(9x - 10) - (3x - 4)(5x - 6) - 84.$

2) Ein Kapital beträgt mit seinen Zinsen nach einem Jahr 22781 ℳ. Wäre das Kapital um 200 ℳ größer und stünde es $\frac{1}{4}$ % höher auf Zinsen, so würde es in einem Jahre auf 23045 ℳ angewachsen sein. Wie groß ist das Kapital, und zu wieviel % steht es aus?

3) Wenn ein Markstück auf ein Zweimarkstück konzentrisch gelegt wird, so bleibt ein Kreisring unbedeckt. Wie groß ist dieser, wenn die Umfänge der Münzen 87,92 mm und 75,36 mm betragen?

4) Die Grundfläche eines Parallelepipedums ist ein Quadrat, dessen Seite um 8 m kleiner ist als die Höhe des Körpers. Wie groß ist dessen Kubikinhalt, wenn die Oberfläche 224 qm beträgt?

III. Absolutorialaufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra an den humanistischen Gymnasien Bayerns*).

Im Jahre 1854. Es soll das Produkt:

$$(3b - 5b\sqrt[6]{a^5b} - 7ab\sqrt[3]{a^2b}) \cdot (6\sqrt[3]{ab} + 2a\sqrt[3]{ab^2} - 8a^2\sqrt[6]{ab^5})$$

in eine algebraische Summe verwandelt werden!

---

*) Es sind hier nur diejenigen Aufgaben aufgenommen, die in das Pensum einschlagen, auf welches sich die vorliegende Sammlung erstreckt. Dies gilt auch für den folgenden Abschnitt IV. Wer sich für die anderen Aufgaben interessiert, der vergleiche: Ducrue, Die Absolutorialaufgaben aus den mathematischen und naturwissenschaftlichen Fächern an den humanistischen Gymnasien, Realgymnasien und Realschulen Bayerns; Würzburg, Stahl.

1855. Es sollen aus den Gleichungen:

$$1)\ y + 1 = 2x - 2$$
$$2)\ x + 1 = 3y - 3$$

die Werte für x und y bestimmt werden!

1857. Es soll aus den Gleichungen:

$$1)\ \frac{3x - 2y}{5} = \frac{x + 3y}{6} - 1$$
$$2)\ \frac{3}{3x - 4y + 1} = \frac{5}{x + y - 5}$$

der Wert für x und y bestimmt werden!

1858. 1) Aus den Gleichungen:

$$1)\ a(x - y) + b(x + y) = 0$$
$$2)\ (x + y)(a^2 - b^2) = 2a$$

sollen die Werte für x und y bestimmt werden!

2) Welchen Wert hat x, wenn:

$$\sqrt{2x + 3} - \sqrt{x + 1} = 1$$ gegeben ist? (q.)

1859. 1) Es soll das Produkt:

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{10})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{10})(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{10})$$
$$(\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{10})$$

in eine algebraische Summe verwandelt und auf den einfachsten Ausdruck gebracht werden!

2) Es sollen aus der Gleichung:

$$(x - a)(x - b) = 2(a - b)^2$$

die Werte für x bestimmt werden! (q.)

1860. Es soll die Gleichung:

$$\frac{x(x + 2)}{a + b} + \frac{a - b}{ab} = \frac{(a + b)x}{ab}$$

aufgelöst werden! (q.)

1861. Aus den Gleichungen:

$$1)\ x + y = z + 3b$$
$$2)\ a(2x - z) = b(3y + z) + 6b^2$$
$$3)\ \frac{6b}{a} + \frac{2y - z}{b} = \frac{3x - z}{a}$$

die Werte x, y und z zu bestimmen!

1862. Welchen Wert hat x in der Gleichung:

$$\frac{3x + 1}{4x - 6} + \frac{7x + 2}{6x + 9} = \frac{8x^2 - 3x + 3}{4x^2 - 9}$$ (q.)

1863. Aus der Gleichung:

$$\left(\frac{4x}{a + b}\right)^2 = 4x - ab$$

den Wert von x zu bestimmen! (q.)

1864. Aus der Gleichung:

$$\frac{a^2}{x - b} + \frac{b^2}{x - a} = a + b$$

soll der Wert für x bestimmt werden! (q.)

1865. Aus der Gleichung:

$$x^2 = \frac{b(1 + x)}{a} - \frac{a(1 - x)}{b}$$

den Wert von x zu bestimmen! (q.)

1866. Es sollen aus den Gleichungen:

$$1)\ (a + b)(x + y) + 1 = 0$$

$$2)\ \frac{bx - 1}{a} + \frac{ay + 3}{b} = \frac{1}{a + b}$$

die Werte von x und y berechnet werden!

1869. Bestimme die Werte der Unbekannten aus den Gleichungen:

$$1)\ xy - \tfrac{1}{2}(x + \tfrac{1}{2}y) = 1$$

$$2)\ \tfrac{2}{3}z - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}y - x) = 2$$

$$3)\ \tfrac{5}{6}z - \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}x - y) = 3.$$

1870. Welche Werte der Unbekannten entsprechen der Gleichung:

$(3x - 2)^2 - (2x - 3)^2 = 5\sqrt{x^2 + 5}$? (q.)

1871. Bestimme x aus der Gleichung:

$$0{,}04^x \sqrt[5]{32768^{x+1}} = 3{,}2\sqrt{2}.$$

1872. Welche Werte berechnen sich für die Unbekannte aus der Gleichung:

$$\sqrt{x + \sqrt{10}} + \sqrt{x - \sqrt{10}} = \sqrt{6x - 11}$$

und sind wohl beide Werte zulässig? (q.)

1874. 2 solche Zahlen zu finden, daß die Summe ihrer reciproken Werte gleich a und die Summe ihrer Quadratwurzeln gleich b ist! (q.)

1875. Für welche Zahlenwerte von x wird der Ausdruck:

$$\frac{1}{x} + \frac{15}{4} - x$$

positiv, für welche negativ?

1877. x und y zu bestimmen aus:

1) $x^4 - y^4 = 15$

2) $\frac{5\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}{3} + \frac{3}{5\sqrt{x^2 + y^2 + 4}} = 5\frac{1}{5}$ (q.)

1881. 1) $x + y + z = 39.$

2) $x^2 + y^2 + z^2 = 741.$

3) $x^2 = y \cdot z.$ (q.)

1882. Aus den beiden Gleichungen:

1) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 0{,}26xy$

2) $x + y = 0{,}6xy$

sollen die Werte von x und y ermittelt werden! (q.)

1887. 1) Auf den Schenkeln eines rechten Winkels bewegen sich zwei Punkte gleichförmig mit der Geschwindigkeit von a und b m nach dem Scheitel des rechten Winkels, von welchem jeder der beiden Punkte bei dem Beginn der Bewegung c m entfernt ist; nach wieviel Sekunden beträgt die Entfernung der beiden Punkte voneinander e m? Welches ist die kleinste Entfernung während dieser Bewegung und nach wieviel Sekunden wird sie erreicht? Als Zahlen-Beispiel

$a = 3,\ b = 4,\ c = 36,\ e = 17$ m. (q.)

2) Wenn:

1) $x + y = xy$

2) $\sqrt{x^2 + y^2 + 1} = 3xy - 10$, welche Werte entsprechen den beiden Unbekannten? (q.)

IV. Absolutorialaufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra der bayerischen Realschulen.

1869. 1) Welches ist der Wert von x in folgender Gleichung:

$$\frac{(a - b)^2}{a + b} - \frac{2ab - x + b^2}{a - b} = \frac{x + a^2}{a + b} - \frac{x + 2b^2 - a^2}{2b}.$$

2) 1) $x\left(1 + \frac{5y}{100}\right) = 5943\frac{3}{4}$

2) $4x\left(1 + \frac{4y}{100}\right) = 22824.$

1870. 1) Es soll der nachstehende Ausdruck möglichst vereinfacht werden:

$$\frac{\left[\sqrt[3]{ax^2} + 3x\sqrt[3]{ax^{-1}} - 2a\sqrt[3]{\frac{8x^2}{a^2}} + 2a^{-2}\sqrt[3]{a^7x^2}\right]}{\left[\frac{2x}{a}\sqrt{\frac{a}{x}} - \frac{a^2}{x}\sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^{-3}}\right]}$$

2) Es soll die Gleichung:

$$\frac{6x + 5a}{12x + 4a} - \frac{3x + 4a}{3x + a} = \frac{2x - 5a}{9x + 3a} - \frac{13}{12}(2x + a)$$

nach x aufgelöst werden. (q.)

1872. 1) Vereinfache den folgenden Ausdruck:

$$\frac{5\sqrt{28} + 6\sqrt{40}}{5\sqrt{7} + 6\sqrt{10}} + \frac{\sqrt{3\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[6]{108}} - \frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt{\frac{2}{\sqrt[3]{2}}}}$$

$$- \frac{\sqrt[3]{\sqrt{12} - 2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{12} + 2}}{\sqrt[3]{7 + \sqrt{22}} \cdot \sqrt[3]{7 - \sqrt{22}}}$$

2) Welches ist der Wert von x in folgender Gleichung:

$$\frac{a^2 \cdot n}{a - x} = an + \frac{n}{x - \frac{1}{a}} \quad (q.)$$

1873. Welche Werte haben x und y in den beiden nebeneinander bestehenden Gleichungen:

1) $\frac{1 + x}{y - 1} = 2 \cdot \frac{(m - n)^2 - 2n^2}{(m^2 - n^2) \cdot (y - 1)} + 1.$

2) $m + n - mx = \frac{mn}{m + n} - ny + \frac{mn(3m + n)}{m^2 - n^2}.$

1875. Eine Gesellschaft hat eine jährliche Ausgabe von 200 *M* zu bestreiten, zu deren Deckung alle Mitglieder gleichmäßig beitragen. Wenn nun in einem Jahre die Zahl der letzteren um 20 geringer geworden und in Folge dessen der Beitrag eines jeden um 5 *M* gegen dem des vorjährigen erhöht worden ist, welches war die Zahl der Mitglieder und die Höhe des Beitrags im Vorjahre? (q.)

1877. Welchen Wert hat x in der Gleichung:

$$\frac{\sqrt{2x+7}}{8} = \frac{\frac{1}{8} - (2 - \sqrt{2x+7})}{[(\sqrt{x+11} + \sqrt{4-x})(\sqrt{x+11} - \sqrt{4-x})]^{\frac{1}{2}}} \text{(q.)}$$

1880. Welchen andern Wert kann man für a in dem Quotienten

$$\frac{a^2 - 2a + 3}{2a + 1}$$

einsetzen, ohne daß sich der Wert desselben ändert?

1881. Aus folgenden Gleichungen sind die Werte für x und y zu bestimmen:

$$1)\ \frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = 10. \qquad 2)\ \sqrt{xy} = 16. \quad \text{(q.)}$$

1892. Aus folgenden 2 Gleichungen die Werte der Unbekannten x und y zu bestimmen:

$$1)\ x + xy - y = 13.$$

$$2)\ \sqrt{x - y} + 2\sqrt{3} = 1 + \sqrt{xy}. \quad \text{(q.)}$$

Alphabetisches Register.

Vorbemerkung. Das folgende kleine Register soll das Nachschlagen und Auffinden einiger Begriffsbestimmungen erleichtern, welche diese Aufgabensammlung enthält. Die Zahlen bedeuten die Seiten.

Verlag

der

Friedr. Kornschen Buchhandlung in Nürnberg.

I. Für Volks-, Töchter- und Fortbildungsschulen.

Fuß, K., Der erste Unterricht in der Naturgeschichte. Ein methodisches Handbuch für Haus und Schule. Dritte Auflage; 3,50 *M.*

Fuß, K., Der erste Unterricht in der Naturgeschichte. Ein Wiederholungsbuch für die Hand der Schüler. I. Kursus (Unterklasse) 0,40 *M*; II. Kursus (Mittelklasse) 0,55 *M*; III. Kursus (Oberklasse) 0,80 *M.*

Fuß, K., Lehrbuch der Physik und Chemie. Ein Hilfsmittel für Lehrer und Lehrerinnen. Zweite Auflage. 2,40 *M.*

Fuß, K., Kleine Naturlehre für Schulen. Ein Übungs- und Wiederholungsbüchlein für die Hand der Schüler. Zweite Auflage. 0,50 *M.*

Fuß, K., Ausführliche Präparationen für den Unterricht in der Naturkunde; erstes Heft, 1,20 *M*; **zweites Heft:** Die Natur und ihre Glieder in Lied, Sage, Märchen und Fabel. Beiträge zur Belebung des naturkundlichen Unterrichts, zur Weckung und Pflege von Natursinnigkeit und Stoffe zu Aufsatzübungen; 2,50 *M.*

II. Für Mittelschulen und zum Selbstunterricht.

Fuß, K., Lehrbuch der Buchstabenrechnung und Algebra. Erster Teil, 3 *M*, zweiter Teil, 1,40 *M.* Dritte Auflage.

„. . . . Auf jedem Blatte empfindet man es wohlthuend, daß ein praktischer Schulmann auf dem Gebiete des algebraischen Unterrichts hier seine Erfahrungen niedergelegt hat, der methodisches Geschick mit wissenschaftlichem Ernste glücklich zu verbinden weiß. . . . . Sehr sympathisch war dem Referenten der Gedanke, die Gleichungen möglichst frühzeitig im Unterricht auftreten zu lassen . . . . .“
Bayerische Lehrerzeitung Nr. 44, 1892.

„. . . . Klare Entwicklung der Lehrsätze und Formeln an Beispielen und methodisch angeordneter Gang machen den Unterricht nach diesem Buche zu einem angenehmen und erfolgreichen . . . . sie erwecken Lust und Liebe zur mathematischen Beschäftigung . . . ." Pfälzische Lehrerzeitung, Nr. 2, 1892.

„. . . . Das vorliegende Lehrbuch muß unbedingt zu den brauchbarsten Lehrmitteln gezählt werden . . ." Literaturblatt für kath. Erzieher Nr. 9. 1892.

„. . . . Es eignet sich auch vollständig zum Selbstunterricht und ist ein Buch, das die beste Empfehlung verdient. . . ."
Prof. Eichler in: Pädagogium von Dr. Dittes Nr. 5, 1893.

„. . . . Wir empfehlen das ausgezeichnete Buch auch zum Selbststudium aufs beste . . . ." Allgem. deutsche Lehrerzeitung, Anzeiger Nr. 5, 1892.

Fuß, K., Sammlung von Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra; hiezu „Resultate und Andeutungen zur Auflösung." Vierte Auflage.

„. . . . Wir wünschen dieser äußerst reichhaltigen und sehr empfehlenswerten Sammlung immer weitere Verbreitung." Bayerische Lehrerzeitung.

Fuß, K., Die wichtigsten Sätze aus der Planimetrie und Stereometrie. 0,75 *M.*

Dieses Werkchen enthält in übersichtlicher Anordnung und Gruppierung die wichtigsten Sätze aus der Geometrie und bildet so eine Ergänzung zur Sammlung von Konstruktions- und Rechenaufgaben desselben Verfassers aus der Planimetrie und Stereometrie.

Fuß, K., Sammlung von Konstruktions- und Rechenaufgaben aus der Planimetrie und Stereometrie; hiezu: „Resultate und Andeutungen zur Auflösung." Zweite Auflage. 2,40 *M.*

„. . . . Die Sammlung ist reich an sorgfältig gewählten, durchaus zweckdienlichen Aufgaben mit instruktiven Zeichnungen. Das treffliche Werk kann für den Schul- und Selbstunterricht aufs beste empfohlen werden. — Die Andeutungen zur Auflösung sind bei möglichster Kürze klar, bestimmt und zum Verständnis ausreichend. Das Werkchen verdient mit der Aufgabensammlung weiteste Verbreitung." Schulanzeiger für Oberfranken Nr. 19, 1896.

„. . . . . Besonders unseren jüngeren Kollegen können wir sie als treffliche und völlig ausreichende Quelle zur Vorbereitung für den geometrischen Teil der Anstellungsprüfung mit gutem Gewissen empfehlen."
Bayerische Lehrerzeitung Nr. 5, 1897.

„. . . . Die Auswahl der Aufgaben ist empfehlenswert . . . . Die Benützung dieser Aufgabensammlung ist dem Lehrer sehr leicht gemacht, denn die Resultate und Andeutungen zur Auflösung umfassen einen besonderen Band von 114 Seiten." Mittenzwey, Leipzig: Pädagogische Blätter v. Muthesius Nr. 2, 1898.

Fuß, K., Grundzüge der Chemie, aus Versuchen entwickelt. Dritte Auflage. 3,50 *M.*

„. . . . Wir halten das Buch für eine wertvolle Handreichung an Lehrende und Lernende, die dankbar hingenommen werden wird . . . ."
Bayerische Lehrerzeitung Nr. 50, 1893.

„. . . . Wenn ein Werk, wie das vorliegende, binnen kurzer Frist in dritter Auflage erscheint, so spricht das wohl am meisten für die Trefflichkeit und Brauchbarkeit desselben . . . ." Dr. Karl Müller in: Natur Nr. 47, 1893.

Fuß, K., Grundzüge der Geologie. Mit Abbildungen. 1,20 *M.*

„... Verfasser hat durch vorliegende Grundzüge ein sehr brauchbares und beachtenswertes Werkchen geschaffen ...."

Anzeiger für die neueste pädagogische Literatur Nr. 4, 1895.

„.... Diese Grundzüge enthalten das Wichtigste aus der Geologie in einer Form, die recht interessant ist und anregt."

Blätter für die Schulpraxis Nr. 3, 1895.

Nürnberg, im Oktober 1898.

Hochachtungsvoll

Friedr. Kornsche Buchhandlung.
